Mathématiques 1

PSI

2014

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Notations

– On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.
– On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé canonique $\mathcal{R}$, d'origine O.

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes ; les parties II et III utilisent les notations $R(z)$ et $V_n(z)$ introduites dans la première partie.

I Première partie

I.A – Soit z un nombre complexe, de partie réelle x et de partie imaginaire y, tels que $(x,y) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$. On note

$$\theta(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{et} \qquad R(z) = \frac{z+|z|}{\sqrt{2\,(\mathrm{Re}(z)+|z|)}}$$

I.A.1) Justifier que θ et R sont bien définies.

I.A.2) Lorsque z vaut successivement $z_1 = 4$, $z_2 = 2\mathrm{i}$ et $z_3 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, calculer $R(z)$, $\theta(z)$ et $\left(R(z)\right)^2$.

I.A.3) Vérifier que $\theta(z) \in \,]-\pi,\pi[$ et que $R(z) \in \mathcal{P} = \left\{Z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(Z) > 0\right\}$.

I.A.4) Représenter sur une figure le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $|z|$ et les points M d'affixe z et B d'affixe $-|z|$.
En considérant des angles bien choisis, montrer que

$$\theta(z) = \mathrm{Arg}(z) = 2\,\mathrm{Arg}\,(z+|z|)$$

où $\mathrm{Arg}(z)$ désigne la détermination principale de l'argument du nombre complexe z.

I.A.5) Déterminer $\left[R(z)\right]^2$, $\theta \circ R(z)$ et $|z|^{1/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(z)/2}$ en fonction de z, $R(z)$ et $\theta(z)$.

I.A.6) Résoudre à l'aide de R l'équation $Z^2 = z$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

I.A.7) En déduire que R est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ dans $\mathcal{P}$. Préciser sa bijection réciproque.

Dans la suite du problème, on prolonge R à $\mathbb{C}$ en posant $R(x) = \mathrm{i}\sqrt{|x|}$ si $x \in \mathbb{R}^-$.

I.B – Soient a et b deux nombres complexes tels que $(a,b) \neq (0,0)$.
On dit qu'une suite complexe $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $(E_{a,b})$ si l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2au_{n+1} + bu_n$$

I.B.1) On suppose que $a^2 + b \neq 0$. On note $d = R(a^2+b)$. On appelle W la suite $W = \left((a+d)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et W' la suite $W' = \left((a-d)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrer que U vérifie $E_{a,b}$ si et seulement si $U \in \mathrm{Vect}(W,W')$.
Déterminer U vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, en fonction de d, W et W'.

I.B.2) On suppose que $a^2 + b = 0$ et $a \neq 0$. On note W et W' les suites $W = \left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $W' = \left(n\,a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrer que U vérifie $E_{a,b}$ si et seulement si $U \in \mathrm{Vect}(W,W')$.
Déterminer U vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, en fonction de a, W et W'.

Dans la suite du problème, on note :

- $U(a,b) = \left(U_n(a,b)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $U_0(a,b) = 0$ et $U_1(a,b) = 1$;
- $V_n(z) = U_{n+1}(z,-1)$ pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

I.B.3) Expliciter $V_1(z)$, $V_2(z)$ et $V_3(z)$ et déterminer leurs racines dans $\mathbb{C}$.

I.B.4) Montrer que, pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$V_n(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} (2z)^{n-2j} (-1)^j \tag{I.1}$$

On pourra procéder par récurrence.

II Deuxième partie

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note C_z (respectivement Ω_z) l'ensemble des points du plan d'affixe complexe Z tels que $|Z\,(Z-2z)| = 1$ (respectivement $|Z\,(Z-2z)| < 1$).

II.A – Dans cette question on suppose que z est un réel noté a.
On se place dans le repère orthonormé $\mathcal{R}'$ de centre O' d'affixe a, déduit de $\mathcal{R}$ par translation.

II.A.1) Montrer qu'une équation de la courbe C_a en « coordonnées polaires (ρ, θ) » dans le repère $\mathcal{R}'$ est

$$\left(\rho^2 + a^2\right)^2 - 4a^2\rho^2\cos^2\theta = 1$$

II.A.2) Simplifier cette équation lorsque $a = 1$. Étudier et tracer l'allure de la courbe C_1.

II.B – On suppose à nouveau z complexe quelconque.

II.B.1) Justifier que Ω_z est une partie bornée du plan. Est-elle ouverte ? fermée ? compacte ?

II.B.2) Justifier que l'origine O est un point intérieur à Ω_z.

II.C – On reprend dans cette question la notation R introduite dans la première partie à la question I.A.

II.C.1) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 \neq 1$. On note

$$r = \left|R(z^2-1)\right|,\ s = \left|z + R(z^2-1)\right|,\ t = \left|z - R(z^2-1)\right|,\ h = \max(s,t)$$

Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|V_n(z)| \leqslant \dfrac{h^{n+1}}{r}$.

II.C.2) Que dire du rayon de convergence de la série entière $Z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} V_n(z)\, Z^n$?

On note g_z sa somme.

II.C.3) Lorsque cela a un sens, calculer $(1 - 2zZ + Z^2)\, g_z(Z)$.

II.C.4) Déterminer l'ensemble de définition D_z de la fonction $Z \mapsto \dfrac{1}{1-2zZ+Z^2}$.

II.C.5) Montrer qu'il existe un disque ouvert non vide Δ de centre O inclus dans Ω_z tel que

$$\forall Z \in \Delta, \qquad \frac{1}{1-2zZ+Z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(z)\, Z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \Big(Z^p\,(2z-Z)^p\Big)$$

II.C.6) En déduire que la fonction de la variable réelle x

$$G_z :\ x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \Big(x^p\,(2z-x)^p\Big)$$

admet un développement limité à tout ordre en 0. On le note

$$G_z(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + o(x^n) \qquad x \to 0$$

Déterminer les coefficients a_k pour $k \in \mathbb{N}$.

II.C.7) Retrouver alors la relation (I.1).

III Troisième partie

On note :
- α un réel tel que $\alpha > -1/2$;
- E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$ et à valeurs réelles ;
- F_n le sous-espace vectoriel de E des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n, où $n \in \mathbb{N}$;
- φ_α l'application qui, à toute fonction y de E, associe la fonction

$$\varphi_\alpha(y)\ :\quad t \mapsto (1-t^2)\,y''(t) - (2\alpha+1)\,t\,y'(t)$$

- S_α l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$S_\alpha(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$$

III.A –

III.A.1) Vérifier que S_α est un produit scalaire sur E.

III.A.2) Justifier que φ_α est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

III.A.3) Montrer que

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad S_\alpha(\varphi_\alpha(f),g) = S_\alpha(f,\varphi_\alpha(g))$$

On pourra calculer la dérivée de $t \mapsto (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}\,f'(t)$.

III.B – Soit $n \in \mathbb{N}$.

III.B.1) Justifier que φ_α induit sur F_n un endomorphisme et que cet endomorphisme induit (encore noté φ_α) est diagonalisable.

III.B.2) Montrer qu'il existe une base de F_n constituée de vecteurs propres de φ_α de degrés deux à deux distincts.

III.B.3) Vérifier que deux vecteurs propres de φ_α de degrés distincts sont associés à des valeurs propres distinctes.

On pourra s'intéresser au coefficient dominant d'un polynôme judicieux.

III.B.4) Justifier que deux vecteurs propres de φ_α de degrés distincts sont orthogonaux.

III.B.5) Montrer que tout vecteur propre de φ_α de degré supérieur ou égal à 1 s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

III.C – Dans cette partie, on suppose $\alpha = 1$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à S_1.

III.C.1) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme vecteur propre de φ_1 de degré k, de norme 1 et de coefficient dominant positif. On le note T_k.

III.C.2) Soit $t \in]0,\pi[$. Montrer que la fonction

$$H_t\ :\ x \mapsto \frac{1}{1-2x\,\cos(t)+x^2}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$.

III.C.3) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,\pi[\,, \qquad V_n(\cos t) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin t}$$

III.C.4) En dérivant deux fois la fonction $t \mapsto (\sin t)\,V_n(\cos t) - \sin((n+1)t)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est vecteur propre de φ_1.

III.C.5) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n et T_n sont proportionnels. Expliciter le coefficient de proportionnalité.

III.C.6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de T_n.

• • • FIN • • •