

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Physique 2

PC

2014

4 heures

Calculatrices autorisées

Automated Transfer Vehicle

Les véhicules de transfert automatique ou ATV (de l'anglais "Automated Transfer Vehicle") sont des vaisseaux spatiaux desservant la station spatiale internationale et chargés d'assurer son ravitaillement en énergie, matériaux et combustibles. De par leur nature, ils assurent et garantissent la viabilité et le fonctionnement de la station. En terme de défis techniques et de performances, ils constituent le plus ambitieux des projets de construction spatiale jamais entrepris en Europe.

Dans la suite de ce problème, nous ferons référence aux objets étudiés en utilisant leurs acronymes anglais : ATV pour Automated Transfert Vehicle (véhicule de transfert automatique), ISS pour International Space Station (station spatiale internationale).

Nous allons nous intéresser à quelques phases du voyage du troisième vaisseau de la série ATV, l'ATV-3 Edoardo Amaldi, et décrire quelques étapes majeures de son odyssée spatiale allant de son lancement par la fusée Ariane V à sa destruction lors de sa rentrée dans l'atmosphère.

L'ATV-3 Edoardo Amaldi a été lancé, par la dernière version du lanceur Ariane V, le 23 mars 2012, il a rejoint en moins de six jours l'ISS. Il s'y est arrimé le 29 mars. La manœuvre s'est déroulée à une vitesse de $28\,000\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ avec une précision meilleure que 10 cm. Il l'a quittée le 4 octobre 2012 pour se détruire, comme prévu, lors de sa phase de rentrée atmosphérique au-dessus du pacifique.

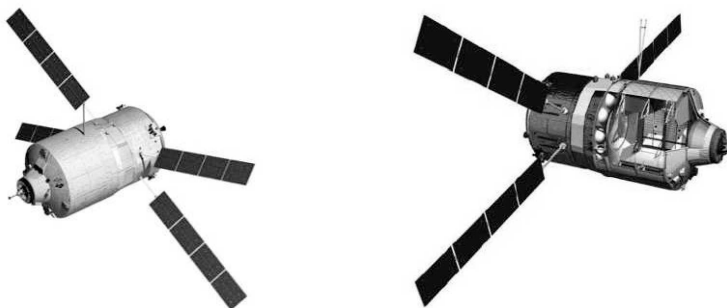


Figure 1 ATV-3 - Edoardo Amaldi

I L'orbite de l'ISS

L'ISS se trouve sur une orbite quasiment circulaire, à une altitude $d_s = 400,0\text{ km}$, dont le plan orbital forme un angle de $51,6^\circ$ avec le plan de l'équateur. Après une dizaine de minutes de vol, Ariane V libère l'ATV sur une première orbite circulaire, dite d'injection, d'altitude $d_i = 250,0\text{ km}$, située dans le même plan orbital que l'orbite de l'ISS. Puis l'ATV, en empruntant une orbite elliptique, rejoint l'orbite de l'ISS.

I.A - Préliminaires gravitationnels

La Terre est assimilée à un objet de symétrie sphérique de rayon R_T et de centre T . Pour suivre un point M de l'espace, on utilise le référentiel géocentrique de centre T et un système de coordonnées sphériques. M est repéré par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{TM}$.

I.A.1) Rappeler les expressions de la force d'attraction gravitationnelle et de la force de Coulomb s'exerçant respectivement entre deux objets ponctuels de masses m, m' et de charges q, q' distants de r .

I.A.2) Le champ d'attraction gravitationnel créé par la Terre en M est noté $\vec{A}(\vec{r})$.

En raisonnant par analogie entre les forces gravitationnelles et coulombiennes, exprimer l'équivalent pour le champ $\vec{A}(\vec{r})$ du théorème de Gauss pour le champ électrique.

I.A.3) Démontrer que le champ d'attraction gravitationnel créé par la Terre s'exprime à l'extérieur de celle-ci, en un point M , sous la forme $\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$.

Déterminer l'expression de k en fonction de la masse de la Terre M_T , puis en fonction de la norme du champ de gravitation g_0 à la surface de la Terre et du rayon de la Terre R_T .

On donne $g_0 = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et le rayon terrestre moyen $R_T = 6370 \text{ km}$.

I.B – L'orbite circulaire de l'ISS

I.B.1) Montrer qu'un mobile sans propulsion décrivant une trajectoire circulaire dans le champ de gravitation possède une vitesse uniforme.

I.B.2) Déterminer la vitesse et la vitesse angulaire de rotation du mobile en fonction du rayon de l'orbite et de k .

I.B.3) Retrouver la troisième loi de Kepler pour ce type d'orbite.

I.B.4) Exprimer l'énergie potentielle du mobile de masse m (référence d'énergie potentielle nulle à l'infini) en fonction du rayon de l'orbite. Faire de même pour l'énergie cinétique.

Quelle relation lie l'énergie cinétique et l'énergie potentielle ?

Ce résultat est connu sous le nom du théorème du viriel.

I.B.5) En déduire l'expression de l'énergie totale du mobile en fonction du rayon de son orbite.

I.B.6) Calculer la vitesse u_s , la vitesse angulaire ω_s , la période T_s et le rayon r_s de l'orbite de la station.

II La phase finale d'approche

II.A – La dérive d'approche

En pratique, pour des raisons de sécurité, l'ATV suit une orbite de transfert qui l'amène au point A_0 à une distance $L_0 = 300 \text{ km}$ derrière l'ISS sur une orbite circulaire d'altitude inférieure de $h = 10,0 \text{ km}$. On laisse ensuite dériver l'ATV jusqu'au point A_1 situé à une distance $L_1 = 30 \text{ km}$ de l'ISS. On appelle phase Φ , la différence de position angulaire entre l'ATV et l'ISS (voir figure 2). Les distances évoquées sont les abscisses curvilignes mesurant la position de l'ATV sur son orbite par rapport au point correspondant de coïncidence de phase avec l'ISS. Vu le rayon de l'orbite, la courbure peut être négligée.

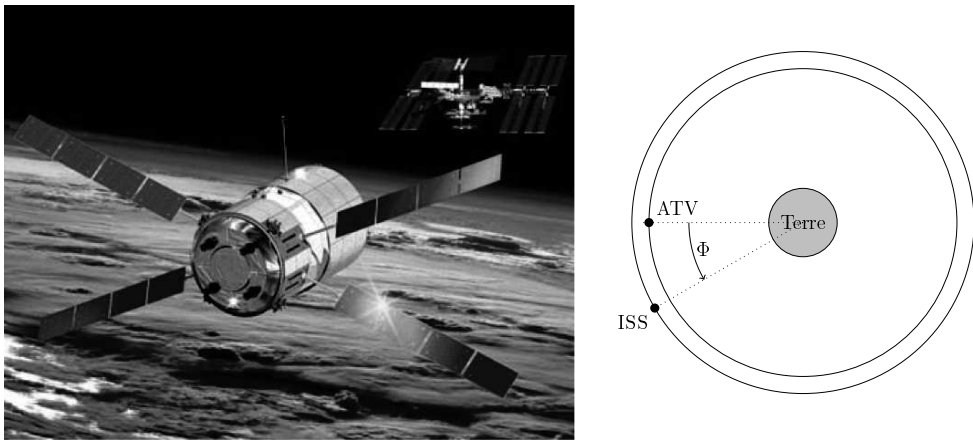


Figure 2 ATV-3 en phase d'approche

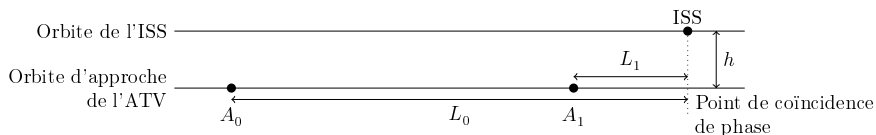


Figure 3

II.A.1) Quelle est la différence de phase entre ces deux positions A_0 et A_1 ?

II.A.2) En effectuant une analyse de premier ordre par rapport à h/r_s , exprimer la vitesse angulaire de l'ATV et en déduire la vitesse angulaire relative entre les deux mobiles en fonction de ω_s , r_s et h où ω_s et r_s sont les paramètres de l'ISS définis et déterminés dans la partie I.

II.A.3) En déduire le temps nécessaire pour passer de A_0 à A_1 .

Une fois en A_1 , l'ATV va accrocher en visuel l'ISS et se préparer pour son approche finale qui sera gérée en automatique.

II.B – La dynamique d'approche

Au-delà de la position A_1 les mouvements de l'ATV sont déterminés, estimés et mesurés par rapport à la station spatiale internationale. Nous effectuerons donc nos analyses dans le référentiel de repère orthonormé direct (x, y, z) lié à l'ISS dont l'axe z coïncide avec la radiale centre de la Terre-ISS et dont l'axe x est tangent à la trajectoire circulaire de l'ISS. On introduit le vecteur rotation $\vec{\omega}_s = \omega_s \vec{e}_y$.

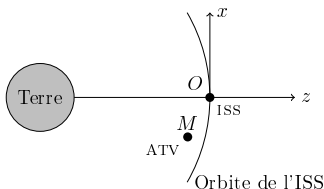


Figure 4

II.B.1) Quelle est la nature de ce référentiel si le référentiel géocentrique est considéré comme galiléen ?

II.B.2) L'ATV est considéré comme ponctuel, on néglige les forces d'attraction gravitationnelles entre l'ATV et l'ISS. Dans le référentiel d'étude, quelles sont les forces s'exerçant sur l'ATV ?

II.B.3) Démontrer que l'accélération d'entraînement de l'ATV peut se mettre sous la forme :

$$\vec{a}_e = -k \frac{\vec{TO}}{TO^3} + \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM})$$

II.B.4) En considérant le point M de coordonnées (x, y, z) dans le référentiel lié à l'ISS, déterminer une expression au premier ordre vis-à-vis des coordonnées de M de la quantité

$$\frac{\vec{TM}}{TM^3} - \frac{\vec{TO}}{TO^3}$$

On pourra chercher à établir une approximation sous forme vectorielle avant d'utiliser les coordonnées cartésiennes.

II.B.5) Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ATV dans le référentiel de l'ISS, démontrer qu'il s'exprime alors sous la forme du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_s \dot{z} = 0 \\ \ddot{y} + \omega_s^2 y = 0 \\ \ddot{z} - 2\omega_s \dot{x} - 3\omega_s^2 z = 0 \end{cases}$$

Ce sont les équations de Clohessy-Wiltshire¹.

II.B.6) On s'intéresse à la résolution du système précédent pour les conditions initiales à $t = 0$ de position $M = (x_0, 0, z_0)$ et de vitesse $\vec{v}_M = (\dot{x}_0, 0, \dot{z}_0)$. Montrer que $z(t)$ peut se mettre sous la forme

$$z(t) = A + B \cos(\omega_s t) + C \sin(\omega_s t)$$

et déterminer les expressions de A , B et C .

II.B.7) En déduire l'expression de $x(t)$ en fonction des conditions initiales $(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0)$ et de ω_s .

II.B.8) Le processus de dérive analysé en II.A vérifie théoriquement les équations de Clohessy-Wiltshire.

a) Si on envisage la dérive (mouvement parallèle à l'axe x), quelle relation vérifient les grandeurs ω_s , \dot{x}_0 et z_0 ? Que peut-on dire de \dot{z}_0 ?

b) En remplaçant dans la solution obtenue des équations de Clohessy-Wiltshire, vérifiez que le mouvement prévu est bien rectiligne.

¹ Clohessy W. H., Wiltshire R. S., Terminal Guidance for Satellite Rendezvous, *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol 27, 1960, p. 653.

II.C – La phase d’approche radioguidée : du pre-homing au homing

Une fois arrivé en A_1 , l’Edoardo Amaldi active son processus de guidage automatique, il devient alors autonome et assure lui-même son contrôle de trajectoire en se repérant par laser (optique) et radio-guidage par rapport à la station spatiale. Le contrôle humain se limite à une commande d’échappement d’urgence si l’un des astronautes, spationautes ou cosmonautes juge une telle mesure nécessaire. L’ATV va maintenir sa trajectoire en confirmant ses paramètres de position jusqu’au point A_2 qui n’est plus distant que de $L_2 = 15,0$ km du point de coïncidence de phase de la station.

Au point A_2 , l’ATV allume brièvement ses moteurs pour acquérir une impulsion supplémentaire, dans la direction x . Il s’en suit une modification, supposée instantanée, de sa vitesse, appelée « DeltaV ». Cette méthode de navigation, qui utilise des modifications rapides de la vitesse du mobile dans des phases de propulsion de courte durée par rapport à l’ensemble du vol, a été introduite en 1925 par Walter Hohmann (ingénieur allemand, 1880-1945). Ce « DeltaV » permet à l’ATV d’atteindre le point A_3 se trouvant à la même altitude que l’ISS et distant de $L_3 = 3500$ m de cette dernière.

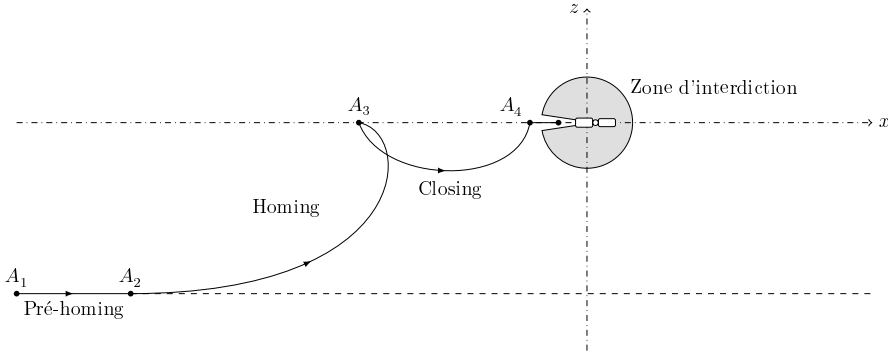


Figure 5

Nous nous plaçons en A_2 et étudions la trajectoire à partir de cet instant considéré comme initial, nous noterons $(\dot{x}_0, \dot{z}_0, x_0, z_0)$ les vitesses et positions initiales de l’ATV. La vitesse initiale est parallèle à l’axe x . Dans ces conditions particulières, le système de Clohessy-Wiltshire admet une solution de la forme :

$$\begin{cases} z = \frac{2}{\omega_s} \left(\dot{x}_0 - \frac{4}{3}v_s - (\dot{x}_0 - v_s) \cos(\omega_s t) \right) \\ x = -3 \left(\dot{x}_0 - \frac{4}{3}v_s \right) t + \frac{4}{\omega_s} (\dot{x}_0 - v_s) \sin(\omega_s t) + x_0 \end{cases}$$

où v_s est une constante.

II.C.1) Que représente v_s ?

Déterminer son expression en fonction des conditions initiales et de ω_s , la vitesse angulaire de l’ISS dans le référentiel géocentrique.

II.C.2) Nous noterons Δv le « DeltaV » qui a lancé l’ATV sur sa trajectoire de homing, exprimer $x(t)$ et $z(t)$ en fonction de Δv , v_s , ω_s et L_2 .

II.C.3) Déterminer l’expression que doit vérifier le temps de homing permettant à l’ATV de passer de A_2 à A_3 .

Quelles sont les conditions sur le « DeltaV » pour que ce temps existe ?

Quelle valeur de « DeltaV » sera la plus pertinente en fonction du coût énergétique de l’impulsion initiale ?

II.C.4) L’analyse de la trajectoire se fait en introduisant des variables réduites. On effectue à cette fin le changement de variable

$$X = \frac{x - x_0}{-z_0} \quad Z = \frac{z - z_0}{-z_0}$$

La figure 6 présente $Z(X)$ pour des valeurs croissantes du rapport $v_s/\Delta v$ variant par pas entier de 3 à 7. Laquelle vous paraît la plus pertinente ? Pourquoi ?

En déduire une estimation numérique du Δv nécessaire.

II.C.5) Que vaut le temps de vol si le choix du coût énergétique minimum s’impose ?

II.C.6) Vu la nature de la trajectoire que doit-il se passer en A_3 ?

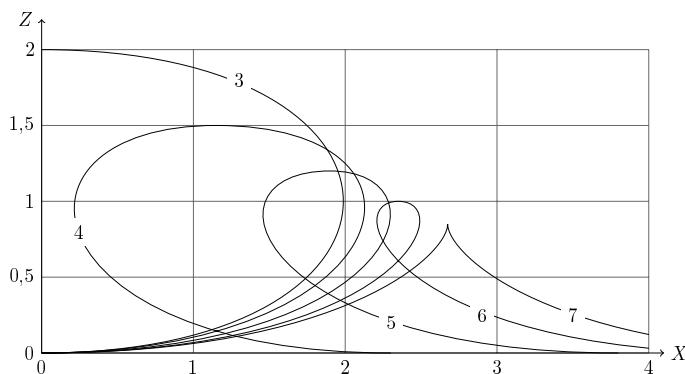


Figure 6 Trajectoire réduite

II.D – Phase finale : le closing

L'ATV va maintenant s'approcher au plus près de l'ISS en passant du point A_3 au point A_4 qui n'est plus qu'à $L_4 = 250$ m de la station. À nouveau, on procède par « DeltaV », cette fois-ci une impulsion est communiquée à l'ATV vers le centre de la Terre, les seuls paramètres initiaux non nuls sont donc $x_0 = -L_3$, $\dot{z}_0 = -v_f$. Les équations de Clohessy-Wiltshire se résolvent alors sous la forme :

$$\begin{cases} z = -\frac{v_f}{\omega_s} \sin(\omega_s t) \\ x = -2\frac{v_f}{\omega_s} (\cos(\omega_s t) - 1) - L_3 \end{cases}$$

II.D.1) En déduire la nature géométrique de la trajectoire et préciser ces paramètres caractéristiques en fonction de L_3 et L_4 .

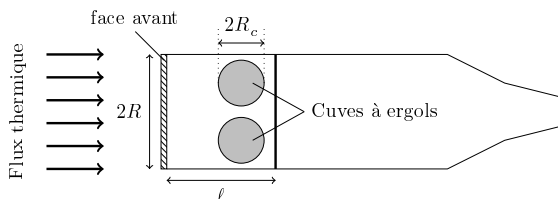
II.D.2) Calculer le temps de vol du point A_3 au point A_4 .

II.D.3) En considérant les différentes techniques de navigation déployées pour l'ATV, que pensez-vous de façon générale de la navigation « à vue » dans l'espace ?

III Autodestruction de l'ATV

Il est prévu que l'ATV, lors de son retour dans l'atmosphère, s'autodétruit à une altitude d'environ 75 km grâce à l'échauffement de son carburant résiduel (les ergols).

III.A – Lors de l'entrée dans l'atmosphère, l'ATV rencontre les hautes couches de l'atmosphère à très grande vitesse et reçoit alors un flux de chaleur considérable. La figure 7 représente un plan de coupe simplifié de l'intérieur de l'ATV. À l'avant de celui-ci se situe une cellule étanche de longueur ℓ qui renferme en particulier huit cuves sphériques de rayon R_c contenant les ergols résiduels qui doivent exploser afin de détruire l'ATV.



Dimensions : $R = 2,2$ m, $\ell = 2,0$ m, $R_c = 55$ cm

Figure 7

La figure 8 représente la distribution de la pression tout autour du véhicule pour une altitude de 75 km. L'air ambiant à cette altitude a une masse volumique $\rho = 4 \times 10^{-5}$ kg·m⁻³.

III.A.1) Donner un ordre de grandeur de la vitesse de l'ATV en s'aidant de la formule de Bernoulli et de la figure 8. Les hypothèses permettant d'utiliser cette formule sont-elles toutes remplies ?

III.A.2) À quoi est dû le flux thermique qui s'applique sur la face avant ?

III.B – Nous allons chercher à estimer le temps auquel va survenir l'explosion qui doit pulvériser l'ATV. Nous supposons que, sur l'ensemble de son parcours d'entrée dans l'atmosphère, sa vitesse est constante et vaut

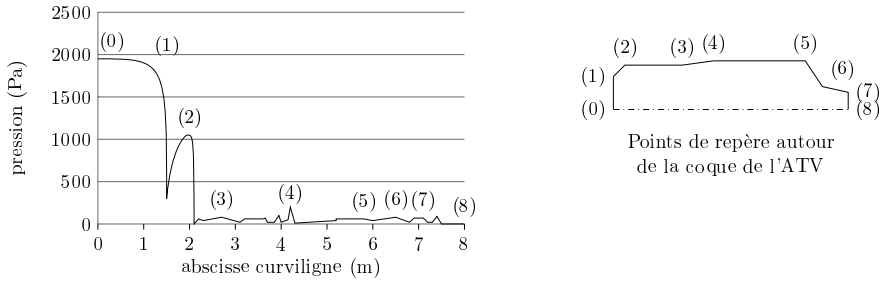


Figure 8 Pression autour de l'ATV à 75 km d'altitude

$v = 7200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, et que son angle d'entrée dans l'atmosphère par rapport à la verticale est de 80° . Il est prévu par les ingénieurs de l'ESA que, sous l'effet de la chaleur et des contraintes mécaniques, la face avant soit perforée lors de l'entrée dans les hautes couches de l'atmosphère. Cette perforation devrait survenir pour une altitude $h_0 = 100 \text{ km}$ et on peut estimer qu'elle prendra la forme d'un trou de diamètre $s = 20 \text{ cm}$ au centre de la face avant.

III.B.1) À partir de la perforation de la face avant, de combien de temps τ_{\max} dispose-t-on au maximum pour faire exploser l'ATV avant d'atteindre l'altitude de 75 km ?

III.B.2) Donner un ordre de grandeur τ_{air} du temps que met l'air chaud à s'engouffrer, à travers le trou, dans la cellule de longueur ℓ située à l'avant de l'ATV et contenant les huit cuves à ergols sphériques de rayon R_c .

III.C – L'air chaud entoure dès lors les cuves à ergols constituées d'une paroi d'aluminium d'épaisseur $e = 4,0 \text{ mm}$. Une seule des huit cuves est encore remplie d'ergols au cours de cette phase.

On pose $S = 4\pi R_c^2$. On prend comme origine du temps (instant $t = 0$) l'instant où l'air a fini de s'engouffrer et on considère qu'à cet instant, l'ensemble de la cuve (enveloppe et ergols) est à la température $T_0 = 290 \text{ K}$ et que sa surface extérieure reçoit un flux thermique uniformément réparti et constant, de densité de courant thermique j_c . On se propose de déterminer l'ordre de grandeur du temps au bout duquel les ergols vont exploser spontanément.

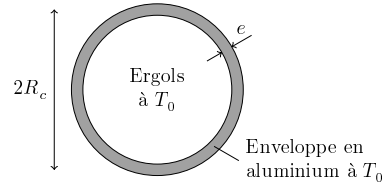


Figure 9

On fournit les données thermodynamiques suivantes :

	Ergols	Aluminium solide
Capacité thermique massique ($\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$)	$c_{\text{erg}} = 2,7$	$c_{\text{Al}} = 0,88$
Conductivité thermique ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)	$\lambda_{\text{erg}} = 0,15$	$\lambda_{\text{Al}} = 230$
Masse volumique ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	$\rho_{\text{erg}} = 800$	$\rho_{\text{Al}} = 2700$

On étudie l'évolution de la température dans une zone assez proche de la surface de la cuve. On introduit alors la profondeur z par rapport à la surface ($z \ll R_c$) et on simplifie le problème de symétrie sphérique en un problème unidimensionnel de variable z (voir figure 10). On considèrera que les transferts énergétiques au sein de la cuve (enveloppe et ergols) résultent uniquement de phénomènes de conduction.

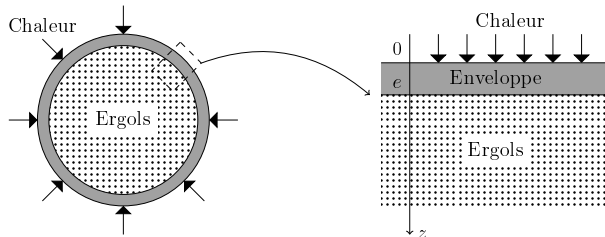


Figure 10

III.C.1) Pour une profondeur z telle que $0 \leq z \leq e$, effectuer un bilan d'énergie entre les profondeurs z et $z + dz$ et établir l'expression de l'équation différentielle vérifiée par $T(z, t)$ en fonction de ρ_{Al} , λ_{Al} et c_{Al} . On supposera que l'aluminium est totalement à l'état solide.

III.C.2) Exprimer et calculer la constante de diffusion D_{A1} . Exprimer et calculer le temps caractéristique τ_{env} de diffusion thermique dans l'enveloppe en fonction de e et D_{A1} .

III.C.3) Établir l'expression de l'équation différentielle vérifiée par la densité de courant thermique $j(z, t)$ dans l'enveloppe. Vérifier alors qu'une solution possible est :

$$j(z, t) = f(\alpha) = A \int_{s=0}^{\alpha} \exp(-s^2) ds + B \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{z}{2\sqrt{D_{A1}t}}$$

où A et B sont des constantes.

III.C.4) La figure 11 donne le graphe de la fonction $g(\alpha) = \int_{s=0}^{\alpha} \exp(-s^2) ds$.

On donne également $I = \int_{s=0}^{+\infty} \exp(-s^2) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

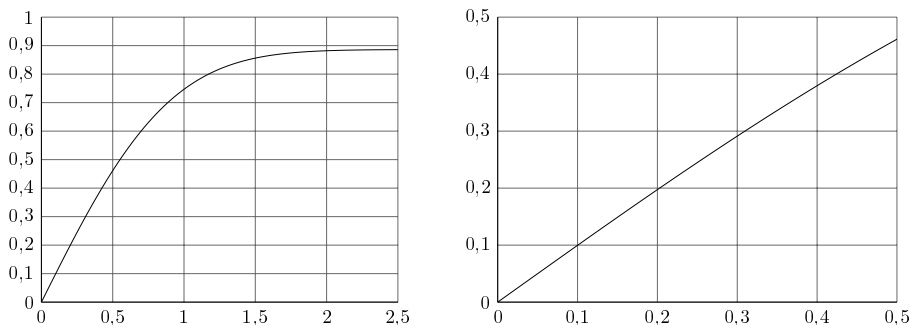


Figure 11

Donner les expressions de A et B en fonction de j_c .

Représenter les graphes de la fonction $j(z, t)$ en fonction de z pour $0 \leq z \leq e$ aux instants $t = 0^+$, $t = \tau_{\text{env}}$ et $t \rightarrow +\infty$. On donnera notamment l'expression de $j(e, \tau_{\text{env}})$.

III.C.5) On considère donc qu'après un temps valant $t = 5\tau_{\text{env}}$, le courant thermique est totalement établi dans l'enveloppe, si bien que $j(z, t) = j_c$ pour $0 \leq z \leq e$.

On prend cet instant comme nouvelle origine du temps $t' = 0$ et on suppose :

- $j(z = e, t') = j_c = 50 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$ (continuité du courant thermique) ;
- $T(z, t' = 0) = T_0$ (inertie thermique des ergols).

Pour $z \geq e$, la solution pour $j(z, t')$ est de la forme :

$$j(z, t') = f'(\alpha') = A' \int_{s=0}^{\alpha'} \exp(-s^2) ds + B' \quad \text{avec} \quad \alpha' = \frac{z - e}{2\sqrt{D_{\text{erg}}t'}}$$

Exprimer et calculer la constante de diffusion D_{erg} . Exprimer A' et B' en fonction de j_c .

III.C.6) Donner l'expression de la dérivée $\frac{\partial T}{\partial t'}(z = e, t')$ en fonction de ρ_{erg} , c_{erg} , D_{erg} , j_c et t' .

III.C.7) On veut estimer le temps à partir duquel les ergols vont réagir avec le dioxygène présent dans la cuve et exploser spontanément. À une température donnée, cette réaction de combustion fortement exothermique se produit spontanément à partir d'une pression minimale d'auto-allumage donnée dans le graphe de la figure 12 (la partie en pointillés est extrapolée).

La pression dans la cuve vaut environ 1000 Pa. À quel instant τ_{exp} peut-on penser que l'explosion va avoir lieu ? Discuter alors les hypothèses effectuées à la question III.C.5.

III.C.8) À cet instant, l'aluminium de la cuve avait-il commencé à fondre (température de fusion de l'aluminium : $T_{\text{fus}} = 930 \text{ K}$) ?

III.D – À partir des résultats précédents, est-il raisonnable de penser que l'ATV aura explosé avant d'atteindre l'altitude de 75 km ?

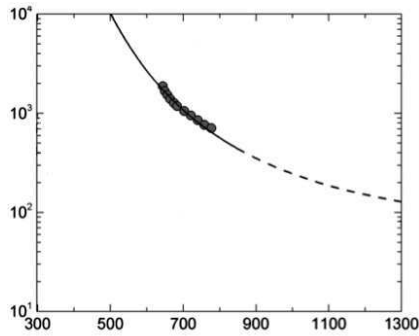


Figure 12 Pression minimale d'auto-allumage des ergols (en Pa) en fonction de la température (en K)

Rappel des données numériques du problème

La Terre

Norme du champ de gravité à la surface terrestre	$g_0 = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Rayon moyen du globe terrestre	$R_T = 6370 \text{ km}$
Période de rotation du globe terrestre	$T_t = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}$

Paramètres de vol de l'ATV-3 Edoardo Amaldi

Altitude de l'orbite d'injection du Lanceur	$d_i = 250,0 \text{ km}$
Altitude de l'orbite de l'ISS lors du lancement de l'ATV	$d_s = 400,0 \text{ km}$

Paramètres de vol relatif de l'ATV-3 Edoardo Amaldi et de l'ISS

Altitude relative lors de la dérive	$h = 10,0 \text{ km}$
Distance entre l'axe coïncidant et le point A_0	$L_0 = 300,0 \text{ km}$
Distance entre l'axe coïncidant et le point A_1	$L_1 = 30,0 \text{ km}$
Distance entre l'axe coïncidant et le point A_2	$L_2 = 15,0 \text{ km}$
Distance entre l'axe coïncidant et le point A_3	$L_3 = 3500 \text{ m}$
Distance entre l'axe coïncidant et le point A_4	$L_4 = 250 \text{ m}$

Formulaire

Développement limité au voisinage de 0 :

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

• • • FIN • • •