


**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI**
**MATHEMATIQUES 2**
**Durée : 4 heures**

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**Les calculatrices sont autorisées.**
**Notations :**

Pour ce problème, on désigne par :

- $n$  un entier naturel non nul ;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'algèbre des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels.

Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note :

- ${}^t A$  la matrice transposée de  $A$  ;
- $\det(A)$  le déterminant de  $A$  ;
- $\text{sp}(A)$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A = A\}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formé des matrices symétriques.

- Un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  est noté :

$$x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est notée :

$$A = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}$$

où  $a_{j,k}$  est le coefficient de  $A$  situé en ligne  $j$  et colonne  $k$ .

– L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est muni du produit scalaire canonique défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle x | y \rangle = {}^t x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

et  $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$  est la norme euclidienne associée.

– La sphère unité de  $\mathbb{R}^n$  est :

$$\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

A toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on associe la fonction  $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_A(x) = \langle Ax | x \rangle.$$

### Objectifs :

Dans la **partie I**, on étudie  $q_A$  pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , puis pour  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et l'on définit une norme sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . La suite du problème est consacrée à une étude des matrices de Hilbert définies par :

$$H_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j, k \leq n}, \text{ où } a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}.$$

On étudie en particulier quelques propriétés du déterminant, des valeurs propres et de l'intervalle  $[\min \text{sp}(H_n), \max \text{sp}(H_n)]$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## Partie I

### Une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

**I.1** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**I.1.1** Énoncer les propriétés de la sphère unité  $\Omega_n$  ainsi que celles de la fonction  $q_A$  qui permettent d'affirmer que  $q_A$  est bornée sur  $\Omega_n$  et qu'elle atteint ses bornes.

On note  $m_A = \min(q_A(\Omega_n))$  et  $M_A = \max(q_A(\Omega_n))$ .

**I.1.2** Démontrer que  $\mathbb{R} \cap \text{sp}(A) \subset [m_A, M_A]$ .

**I.1.3** Expliciter  $\text{sp}(A)$ ,  $m_A$  et  $M_A$  lorsque  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

On pourra remarquer que  $\Omega_2 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ .

**I.2** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $q_A(x) = 0$  pour tout  $x \in \Omega_n$ .

**I.2.1** Montrer que  $q_A(y) = 0$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ .

**I.2.2** Si  $(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , exprimer  $q_A(y + z)$  (qui est nul d'après **I.2.1.**) en fonction de  $\langle Ay \mid z \rangle$  et  $\langle Az \mid y \rangle$ .

**I.2.3** Montrer que la matrice  $A$  est anti-symétrique (c'est-à-dire que  ${}^t A = -A$ ) (entre autre méthode, on pourra par exemple considérer les vecteurs  $y$  et  $z$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ).

**I.3** Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$(\forall x \in \Omega_n, q_A(x) = 0) \Leftrightarrow (A = (0) \text{ (matrice nulle)})$$

**I.4** Montrer que l'application  $N : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)|$$

est une norme.

### **I.5 Bornes de $q_A$ sur $\Omega_n$**

On rappelle le théorème spectral : étant donnée une matrice  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , si on désigne par  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est  $A$ , alors  $u$  étant symétrique réel, il se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire : il existe  $n$  nombres réels  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \leq \lambda_n$  et une base orthonormée  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que :

$$u(e_k) = Ae_k = \lambda_k e_k \text{ pour tout } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

On considère  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et on conserve les notations de ce théorème dans les questions **I.5.**

**I.5.1** Préciser  $q_A(e_k)$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**I.5.2** Soit  $x = \sum_{k=1}^n x'_k e_k \in \Omega_n$ . Justifier les égalités  $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 = 1$ , puis exprimer  $q_A(x)$  en fonction des valeurs propres  $\lambda_k$  de  $A$  et des composantes  $x'_k$  de  $x$ .

**I.5.3** Retrouver le résultat obtenu en **I.1.1** : la fonction  $q_A$  possède un minimum  $m_A$  et un maximum  $M_A$  sur la sphère unité  $\Omega_n$ .

Expliciter  $m_A$  et  $M_A$  en fonction des valeurs propres de  $A$ .

**I.5.4** Montrer que  $N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)| = \max_{\lambda \in \text{sp}(A)} |\lambda|$ . Etablir une inégalité entre  $|\det(A)|$  et  $(N(A))^n$ .

**I.5.5 Exemple :**

Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ , calculer  $\det(A)$  et  $N(A)$ .

Dans toute la suite du problème, pour tout entier  $n \geq 2$ , on désigne par  $H_n$  la matrice de Hilbert d'ordre  $n$  définie par :

$$H_n = \left( \left( \frac{1}{j+k-1} \right) \right)_{1 \leq j, k \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

ou encore  $H_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j, k \leq n}$  avec  $a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}$ .

Pour simplifier, on notera  $q_n$  la fonction  $q_{H_n} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_n(x) = q_{H_n}(x) = \langle H_n x \mid x \rangle$$

**Partie II****Sur les valeurs propres de  $H_n$ .****II.1 Une expression de  $q_n(x)$** 

$$\text{Soit : } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

**II.1.1** Montrer que :

$$q_n(x) = \langle H_n x \mid x \rangle = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{j+k-1} \right) x_j = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{x_k x_j}{j+k-1}.$$

**II.1.2** Développer :

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right) \left( \sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right)$$

où  $t$  est une variable réelle.

**II.1.3** Montrer que :

$$q_n(x) = \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt.$$

**II.1.4** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_n(x) \geq 0$$

et que  $q_n(x) = 0$  équivaut à  $x = 0$ .

Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de  $H_n$  ?

## II.2 Une majoration de $q_n(x)$

**II.2.1** Soit  $P(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$  un polynôme à coefficients complexes. Montrer que :

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

(on pourra expliciter  $\int_{-1}^1 t^k dt$  et  $-i \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta$ ).

**II.2.2** En gardant les notations introduites en **II.1** et en notant :

$$Q(t) = \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}$$

montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$0 \leq q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t) dt \leq \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta$$

l'inégalité étant stricte pour  $x \neq 0$  (on pourra utiliser les résultats obtenus en **II.1** et **II.2.1**).

**II.2.3** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq q_n(x) \leq \pi \|x\|^2$$

l'inégalité étant stricte pour  $x \neq 0$ .

## II.3 Application à $\text{sp}(H_n)$

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on note :

$$\mu_n = \min(\text{sp}(H_n)) \text{ et } \rho_n = \max(\text{sp}(H_n)).$$

**II.3.1** Expliciter  $\mu_2$  et  $\rho_2$ . Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , on a :

$$0 < \mu_n < \rho_n < \pi.$$

**II.3.2** Montrer que  $q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n]$ .

On pourra considérer des vecteurs propres orthogonaux  $e_1$  et  $e_n$  tels que  $H_n e_1 = \mu_n e_1$ ,  $H_n e_n = \rho_n e_n$ ,  $\|e_1\| = \|e_n\| = 1$  et le vecteur  $x = \sqrt{1-t} \cdot e_1 + \sqrt{t} \cdot e_n$  où  $t \in [0, 1]$ .

**II.3.3** Calculer  $\langle H_n \varepsilon_n \mid \varepsilon_n \rangle$  où  $\varepsilon_n$  désigne le vecteur de base canonique :

$$\varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire la limite de  $\mu_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

### Partie III

#### Limite de $(N(H_n))_{n \geq 2}$ grâce à une intégrale double

Dans cette partie, on utilise la relation :

$$\forall t > 0, \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$$

et on suppose  $n \geq 2$ .

#### III.1 Deux intégrales doubles

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on note :

$$D_n = [1, n] \times [1, n], \quad \Gamma_n = [1, \sqrt{n}] \times [1, \sqrt{n}]$$

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dx dy}{\sqrt{xy}(x+y-1)} \quad \text{et} \quad J_n = \iint_{\Gamma_n} \frac{du dv}{u^2 + v^2}.$$

**III.1.1** En utilisant le changement de variable  $(x, y) = (u^2, v^2)$ , montrer que :

$$I_n \geq 4J_n.$$

**III.1.2** On note :

$$K_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\arctan(x)}{x} dx \quad \text{et} \quad L_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) dx.$$

Montrer que  $J_n = K_n - L_n$ .

**III.2 Un équivalent de  $J_n$** **III.2.1** En majorant  $\arctan(t)$ , montrer que :

$$0 < L_n \leq 1.$$

**III.2.2** Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$ .Montrer que  $K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n)$ .**III.2.3** En déduire que  $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n)$ .**III.3 Limite de  $N(H_n)$ .** On utilise les notations et les résultats de la **partie II**.On note  $a$  l'élément de  $\mathbb{R}^n$  :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}.$$

**III.3.1** Montrer que  $\|a\|^2 \leq 1 + \ln(n)$ .**III.3.2** Montrer que  $4J_n \leq q_n(a)$ .**III.3.3** En déduire la limite de  $N(H_n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .**Partie IV****Sur le déterminant de  $H_n$**  $H_n$  désigne toujours la matrice de Hilbert d'ordre  $n$ , pour  $n \geq 2$ .**IV.1 Une fraction rationnelle**On considère la fraction rationnelle  $R_n(x) = \frac{\prod_{k=1}^n (x-k)}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$ .On admettra qu'il existe des réels  $\lambda_{0,n}, \lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{n,n}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \dots, -n\}, R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_{k,n}}{(x+k)}$$

cette décomposition (en éléments simples) de  $R_n$  étant unique.Exprimer le coefficient  $\lambda_{n,n}$  de  $\frac{1}{x+n}$  à l'aide de  $(2n)!$  et de  $n!$

**IV.2 Matrice  $A_n$** 

Pour  $n \geq 2$ , on considère la matrice  $A_n$  définie par  $A_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}$  avec :

$$a_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{j+k-1} & \text{pour } 1 \leq k \leq n-1, 1 \leq j \leq n \\ R_{n-1}(j) & \text{pour } k = n, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$\text{où } R_{n-1}(x) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (x-k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}.$$

**IV.2.1** Montrer que, pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ , on a :

$$R_{n-1}(i) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j-1,n-1} h_{i,j},$$

puis en déduire que  $\det(A_n) = \binom{2(n-1)}{n-1} \det(H_n)$ .

**IV.2.2** Montrer que  $\det(A_n) = \frac{\det(H_{n-1})}{(2n-1) \binom{2(n-1)}{n-1}}$ .

En déduire l'expression de  $\det(H_n)$  en fonction de  $\det(H_{n-1})$ .

**IV.2.3** Montrer, pour tout  $n \geq 2$ , que  $\det(H_n) \neq 0$ , puis que  $\frac{1}{\det(H_n)} \in \mathbb{N}^*$ .

**IV.3 Calcul de  $\det(H_n)$** 

En notant, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Phi_n = \prod_{k=1}^n k!$  montrer que :

$$\forall n \geq 2, \det(H_n) = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}$$

**Fin de l'énoncé**