



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures

Calculatrices autorisées

# Mathématiques 1

PC

2013

Le problème se propose d'étudier par diverses méthodes une intégrale dépendant d'un paramètre. Cette intégrale provient de l'étude du « noyau de Poisson »

$$z \mapsto \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

défini sur le disque unité ouvert du plan complexe. Elle permet d'établir un lien entre séries entières et séries de Fourier.

Les sous-parties III.B, III.C et III.D donnent des méthodes différentes en vue d'un même résultat. Elles doivent être traitées comme indépendantes entre elles.

On utilise les notations habituelles pour les ensembles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .

## I Règle de convergence d'Abel

**I.A** – Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle décroissante qui converge vers 0, et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite complexe telle que la suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $B_n = b_1 + \dots + b_n$  est bornée.

**I.A.1)** Montrer que, pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

**I.A.2)** En déduire que la série  $\sum a_n b_n$  converge.

**I.A.3)** **Application**

Montrer que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$  converge.

**I.B** – On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ , où  $x$  est une variable réelle.

**I.B.1)** Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

**I.B.2)** Montrer qu'elle ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction  $2\pi$ -périodique continue par morceaux.

On pourra commencer par rappeler la formule de Parseval.

**I.C** – Soit  $p$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$$

**I.C.1)** Montrer que  $p$  est bien définie, continue et  $2\pi$ -périodique.

**I.C.2)** Déterminer la série de Fourier de  $p$ .

**I.C.3)** Montrer que la fonction  $p$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .

## II Étude de la série entière $\sum \frac{e^{in\theta}}{n} x^n$

**II.A** – Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**II.A.1)** Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{e^{in\theta}}{n} x^n$ .

**II.A.2)** Soit  $g$  la fonction de  $] -1, 1[$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} x^n$$

a) Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $] -1, 1[$  et que, pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$g'(x) = \frac{e^{i\theta} - x}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}$$

b) Montrer que, si  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$h(x) = -\frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) + i \arctan \left( \frac{x \sin \theta}{1 - x \cos \theta} \right)$$

est bien défini et que  $h(x) = g(x)$ .

**II.B** – Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ .

**II.B.1)** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta t} \frac{1 - (e^{i\theta t})^n}{1 - e^{i\theta t}} dt$$

**II.B.2)** En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta t}}{1 - e^{i\theta t}} dt$$

On pourra utiliser le théorème de convergence dominée.

**II.B.3)** En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos \theta) + i \arctan \left( \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right)$$

**II.B.4)** Montrer que, pour tout  $\theta \in ]0, \pi[$ ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

**II.C** – Soit  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction  $2\pi$ -périodique, impaire, telle que  $\forall \theta \in ]0, \pi[$ ,  $r(\theta) = \frac{\pi - \theta}{2}$ .

**II.C.1)** Justifier l'existence et l'unicité de  $r$ .

**II.C.2)** Déterminer la série de Fourier de  $r$ .

**II.C.3)** En déduire que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

### III Calcul de $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$

#### III.A – Intégrales impropres

**III.A.1)** Montrer que si  $x$  est un réel différent de 1 et de  $-1$ , alors  $x^2 - 2x \cos \theta + 1 > 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**III.A.2)** Étudier la convergence des intégrales impropres

$$\int_0^\pi \ln(\sin \theta) d\theta \quad \int_0^\pi \ln(1 - \cos \theta) d\theta \quad \int_0^\pi \ln(1 + \cos \theta) d\theta$$

En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$  converge.

**III.A.3)** Montrer que, quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,

$$2\pi \ln(x) - \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$$

admet une limite, que l'on déterminera.

**III.A.4)** Montrer que  $x \mapsto \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$  est une fonction paire de la variable  $x \in \mathbb{R}$ .

**III.B – Première méthode de calcul : séries de Fourier****III.B.1)** Soit  $x \in ]-1, 1[$ .Déterminer la série de Fourier de la fonction  $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\tilde{h}(\theta) = \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$ .

On pourra utiliser le résultat de la question II.A.2.

**III.B.2)** En déduire que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta = 0$ .En déduire la valeur de  $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$  dans le cas  $|x| > 1$ .**III.B.3)** Montrer que l'intégrale impropre  $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos \theta) d\theta$  converge.**III.B.4)** Montrer que  $\int_0^\pi \ln(\sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\cos \theta) d\theta$ .**III.B.5)** En déduire que  $\int_0^\pi \ln(\sin \theta) d\theta = -\pi \ln 2$ .**III.B.6)** En déduire que  $\int_0^\pi \ln(2 - 2 \cos \theta) d\theta = \int_0^\pi \ln(2 + 2 \cos \theta) d\theta = 0$ .**III.C – Une deuxième méthode : intégrale dépendant d'un paramètre**Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$ .**III.C.1)** Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad f'(x) = \int_0^\pi \frac{2x - 2 \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} d\theta$$

**III.C.2)** En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ 

$$f'(x) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)t^2 + (x-1)}{((x+1)^2 t^2 + (x-1)^2)(t^2 + 1)} dt$$

**III.C.3)** En déduire que

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi \ln(|x|) & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

On déterminera d'abord des coefficients  $A$  et  $B$  fonctions de  $x$  tels que  $\frac{(x+1)T + (x-1)}{(x+1)^2 T + (x-1)^2 (T+1)} =$ 

$$\frac{A}{(x+1)^2 T + (x-1)^2} + \frac{B}{T+1} \text{ pour tout } T \in \mathbb{R} \text{ tel que ces fractions soient définies.}$$

**III.C.4)** Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et que  $f(1) = f(-1) = 0$ .On pourra montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \cos \theta + 1 \geq \sin^2 \theta$  et utiliser le théorème de la convergence dominée.**III.D – Troisième méthode : racines de l'unité****III.D.1)** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ 

$$\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left( x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) \right)$$

**III.D.2)** Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$(x^n - 1)^2 = \prod_{k=1}^n \left( x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right)$$

**III.D.3)** En déduire que

$$\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta = \begin{cases} 4\pi \ln(|x|) & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

**III.D.4)** En déduire  $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$  pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

**III.D.5)** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left( x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) = \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)^2$$

**III.D.6)** Montrer que  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ .

**III.D.7)** En déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta = -\pi \frac{\ln 2}{2}$$

Retrouver alors le résultat de la question III.B.6.

## IV Théorème de convergence radiale

**IV.A** – Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. On suppose que la série  $\sum a_n$  converge. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$  et on définit les fonctions  $s_n$  et  $s$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$  par  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  et  $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ .

**IV.A.1)** Justifier l'existence de  $s$ .

**IV.A.2)** Soit  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer

$$s(x) - s_n(x) = r_n x^{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k (x^k - x^{k+1})$$

**IV.A.3)** Montrer que  $s$  est continue sur  $[0, 1]$ .

Pour la continuité en 1, fixer  $\varepsilon > 0$  et montrer que si l'entier naturel  $N$  vérifie  $|r_n| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ , alors  $|s(x) - s_N(x)| \leq 2\varepsilon$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Majorer ensuite le module de  $s(x) - s(1) = (s(x) - s_N(x)) + (s_N(x) - s_N(1)) + (s_N(1) - s(1))$ .

**IV.A.4)** Application : retrouver le résultat de la question II.B.3.

**IV.B** – Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Déterminer le développement en série entière de la fonction

$$x \mapsto \frac{1 - x^2}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}$$

sur un intervalle que l'on précisera.

**IV.C** – Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $2\pi$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^1$ . On considère la série de Fourier de  $f$  en cosinus et sinus, notée

$$c_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

**IV.C.1)** Montrer que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) x^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-x^2)f(u)}{x^2 - 2x \cos(t-u) + 1} du$$

**IV.C.2)** En déduire que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-x^2)f(u)}{x^2 - 2x \cos(t-u) + 1} du$$

---

• • • FIN • • •

---