



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures

Calculatrices autorisées

# Mathématiques 1

MP

2013

Dans tout le problème,  $\mathbb{R}^2$  est muni du produit scalaire euclidien canonique noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme  $\| \cdot \|$  associée. Si  $\Omega$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$  et si  $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , on note  $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , la différentielle de  $f$  au point  $p$  de  $\Omega$  est notée  $df_p$ ; sa matrice relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et de  $\mathbb{R}^n$  est appelée *matrice jacobienne de  $f$  en  $p$*  et est notée  $\text{Jac } f(p)$ .

Si  $f$  est dans  $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ , on dit que  $f$  vérifie (1) si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2 = 1 \quad (1)$$

On note  $\mathcal{P}_2$  l'ensemble des fonctions polynomiales de degré  $\leq 2$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  c'est-à-dire les applications de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  de la forme

$$x \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \quad \text{où} \quad (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6.$$

Le but principal du problème est de montrer que les solutions de (1) sur  $\mathbb{R}^2$  appartiennent à  $\mathcal{P}_2$ .

## I Les équations de Cauchy-Riemann

Soient  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  vérifiant les équations, dites de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

On définit deux fonctions sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  par

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(r, \theta) = g(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $\mathcal{E}_n$  l'espace des fonctions  $f$  de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t^2 f''(t) + t f'(t) - n^2 f(t) = 0$$

**I.A** –

**I.A.1)** Exprimer  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta)$  et  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)$  en fonction de  $r, \theta, \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

**I.A.2)** Pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , montrer  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = \frac{1}{r} \times \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r, \theta)$  et  $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \theta) = -\frac{1}{r} \times \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)$ .

**I.B** – Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , soit  $\varphi_\alpha$  la fonction de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_\alpha(t) = t^\alpha$$

**I.B.1)** Pour tout  $n \in \mathbb{Z}^*$ , déterminer les réels  $\alpha$  tels que  $\varphi_\alpha$  appartienne à  $\mathcal{E}_n$ .

**I.B.2)** Déterminer  $\mathcal{E}_n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . On discutera séparément le cas  $n = 0$ .

**I.C** – Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , soient  $c_{n,f}$  et  $c_{n,g}$  les fonctions de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{C}$  définies par

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} c_{n,f}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \\ c_{n,g}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \end{cases}$$

**I.C.1)** Montrer que  $c_{n,f}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et vérifie

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad (c_{n,f})'(r) = \frac{in}{r} c_{n,g}(r)$$

**I.C.2)** Montrer que  $c_{n,f}$  appartient à  $\mathcal{E}_n$  et que  $c_{n,f}$  est bornée au voisinage de 0. En déduire l'existence de  $a_n \in \mathbb{C}$  tel que

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad c_{n,f}(r) = a_n r^{|n|}$$

**I.C.3)** En énonçant précisément le théorème utilisé, établir

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(r, \theta) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=-p}^p a_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

**I.D** – Dans cette question, on suppose que les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^2$ .

**I.D.1)** Si  $n \in \mathbb{Z}$ , montrer que la fonction  $(c_{n,f})'$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**I.D.2)** Montrer que les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont constantes.

## II Quelques solutions de (1)

Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on dit que  $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  vérifie (II.1) sur  $I$  si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad u(t)(u(t) + 2t u'(t)) = -1 \quad (\text{II.1})$$

**II.A** – Déterminer les fonctions de  $\mathcal{P}_2$  vérifiant (1) sur  $\mathbb{R}^2$ .

**II.B** – En énonçant précisément le théorème utilisé, montrer, si  $(t_0, u_0)$  est dans  $(\mathbb{R}^*)^2$ , l'existence d'un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$  et d'une fonction  $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  telle que  $u$  soit solution de (II.1) sur  $I$  et vérifie  $u(t_0) = u_0$ .

**II.C** – Soit  $J$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ . Existe-t-il une fonction polynomiale solution de (II.1) sur  $J$  ?

**II.D** – Soient  $J$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega(J) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \in J\}$ ,  $w$  dans  $\mathcal{C}^2(J, \mathbb{R})$  et  $W$  la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \Omega(J), \quad W(x, y) = w(xy)$$

**II.D.1)** Montrer que  $\Omega(J)$  est un ouvert non vide.

**II.D.2)** Montrer que  $W$  est dans  $\mathcal{C}^2(\Omega(J), \mathbb{R})$  et que l'on a une équivalence entre

i.  $W$  vérifie (1) sur  $\Omega(J)$ ,

ii.  $w'$  vérifie (II.1) sur  $J$ .

**II.D.3)** Montrer que  $W$  est la restriction à  $\Omega(J)$  d'une fonction de  $\mathcal{P}_2$  si et seulement si  $w$  est affine.

**II.E** – Soient  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  dans  $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$  vérifiant (1) sur  $\Omega$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega_{a,b}$  l'image de  $\Omega$  par la translation de vecteur  $(a, b)$  et  $f_{a,b}$  la fonction définie sur  $\Omega_{a,b}$  par

$$\forall (x, y) \in \Omega_{a,b}, \quad f_{a,b}(x, y) = f(x - a, y - b)$$

Montrer que  $f_{a,b}$  vérifie (1) sur  $\Omega_{a,b}$ .

**II.F** – Si  $(x_0, y_0)$  est dans  $\mathbb{R}^2$ , montrer qu'il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $(x_0, y_0)$  tel que l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  vérifiant (1) sur  $U$  et ne coïncidant sur  $U$  avec aucun élément de  $\mathcal{P}_2$  soit infini.

## III Un critère de difféomorphisme

**III.A** – Rappeler la définition d'un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et le théorème caractérisant un tel difféomorphisme parmi les applications de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Dans la suite de cette partie, on considère  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . On suppose que pour tout  $(p, h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$\langle dF_p(h), h \rangle \geq \alpha \|h\|^2$$

Le but de cette partie est de montrer que  $F$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

**III.B** – Soient  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

**III.B.1)** Vérifier

$$F(q) - F(p) = \int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q-p) dt$$

**III.B.2)** Montrer

$$\langle F(q) - F(p), q - p \rangle \geq \alpha \|q - p\|^2$$

**III.C** – Soient  $a \in \mathbb{R}^2$  et  $G^a$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall p \in \mathbb{R}^2, \quad G^a(p) = \|F(p) - a\|^2$$

**III.C.1)** Si  $p$  et  $h$  sont dans  $\mathbb{R}^2$ , calculer  $dG_p^a(h)$ .

**III.C.2)** Montrer que  $G^a(p) \rightarrow +\infty$  quand  $\|p\| \rightarrow +\infty$ .

**III.C.3)** En déduire que  $G^a$  atteint un minimum global sur  $\mathbb{R}^2$  en un point  $p_0$ .

**III.C.4)** Montrer que  $F(p_0) = a$ .

**III.D** – Montrer que  $F$  réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

## IV Le théorème de Jörgens

Soit  $f$  dans  $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  vérifiant (1) sur  $\mathbb{R}^2$ .

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , soient  $u(x, y) = x + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,  $v(x, y) = y + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  et  $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ .

On suppose dans les questions IV.A et IV.B que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**IV.A** – Si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , montrer que  $\text{Jac } F(x, y) - I_2$  (où  $I_2$  désigne la matrice identité d'ordre 2) est symétrique positive. En déduire que  $F$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Dans la suite, soient, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ ,  $s(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$  et  $t(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$  de sorte que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $r(x, y) > 0$  et  $r(x, y)t(x, y) - s(x, y)^2 = 1$ .

**IV.B** –

**IV.B.1)** Montrer qu'il existe deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \varphi(u(x, y), v(x, y)) = x - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \psi(u(x, y), v(x, y)) = -y + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

**IV.B.2)** Calculer  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x, y), v(x, y))$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x, y), v(x, y))$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial u}(u(x, y), v(x, y))$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial v}(u(x, y), v(x, y))$  (que l'on abrégera en  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ ) en fonction de  $r(x, y)$ ,  $s(x, y)$  et  $t(x, y)$  (que l'on abrégera en  $r$ ,  $s$  et  $t$ ).

**IV.B.3)** Montrer que  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^2$ .

**IV.B.4)** Montrer, en utilisant la première partie, que  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  sont constantes.

**IV.B.5)** En déduire que  $r$ ,  $s$  et  $t$  sont constantes.

**IV.C** – Montrer que les seules fonctions de  $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  vérifiant (1) sur  $\mathbb{R}^2$  appartiennent à  $\mathcal{P}_2$ .

---

• • • FIN • • •

---