

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Physique 2

4 heures

Calculatrices autorisées

PC

2012

Trajectoires électroniques dans un atome Traitement du rayonnement Zeeman

Le champ magnétique régnant à la surface du soleil est un des paramètres qui influent sur l'activité solaire (instabilités, jets de plasma, etc.). Il est donc nécessaire de caractériser au mieux celui-ci.

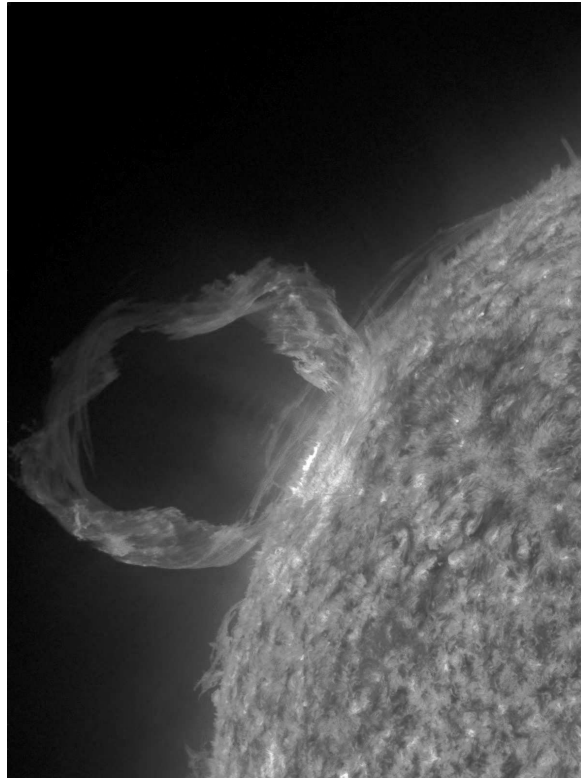


Figure 1 Jet de plasma soumis au champ magnétique solaire (image NASA/SDO/AIA)

Dans les parties I et II, on détermine l'effet d'un champ magnétique sur les trajectoires électroniques au sein des atomes (effet Zeeman), puis dans la partie III on s'intéresse aux ondes électromagnétiques produites par de tels systèmes et sur la façon de les caractériser. La partie III est dans une large mesure indépendante des deux premières.

Les données sont regroupées en fin d'énoncé. Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données.

I Atome isolé

On s'intéresse au mouvement d'un électron d'un atome, supposé ponctuel, de masse m et de charge $-e$, étudié dans un référentiel $R = (Oxyz)$ galiléen. On note M la position de cet électron et on pose $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.

Dans une première approche, on suppose que la force qui s'exerce sur l'électron se réduit à la force électrostatique exercée par le noyau, de type

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$$

Le noyau, de masse très supérieure à la masse des électrons, pourra être considéré comme fixe à l'origine du référentiel R .

I.A – Donner l'expression de k dans le cas particulier de l'atome d'hydrogène.

I.B – Montrer, pour k quelconque, que le mouvement est plan. On supposera par la suite que ce plan coïncide avec Oxy .

I.C – Montrer qu'une trajectoire circulaire de rayon a est possible et déterminer l'expression de la vitesse angulaire (ou pulsation) ω_0 de l'électron pour cette trajectoire circulaire. On exprimera ω_0 en fonction de a , m et k .

I.D – Pour un atome d'hydrogène, donner l'ordre de grandeur de a et en déduire l'ordre de grandeur de ω_0 dans ce modèle.

On admettra par la suite que l'ordre de grandeur de ω_0 est 10^{16} rad · s⁻¹.

II Atome placé dans un champ magnétique extérieur

On suppose désormais que l'atome est placé dans le champ magnétique extérieur $\vec{B}_1 = B_1\vec{e}_z$ et on s'intéresse à la modification, sous l'effet de ce champ magnétique, du mouvement de l'électron. Pour les applications numériques, on considèrera que l'ordre de grandeur de B_1 ne dépasse pas la dizaine de Tesla. Le référentiel $R = (Oxyz)$ est toujours supposé galiléen.

II.A – Mise en équation

II.A.1) En notant toujours \vec{F} la force exercée par le noyau sur l'électron, \vec{a} et \vec{v} respectivement l'accélération et la vitesse de l'électron par rapport à R , déterminer la relation entre \vec{a} , \vec{F} , \vec{v} , $\vec{\omega}_1 = e\vec{B}_1/m$ et m .

II.A.2) Préciser, en justifiant le raisonnement, la dimension de ω_1 et déterminer l'ordre de grandeur maximal de ω_1/ω_0 .

II.B – Étude générale

On introduit un référentiel R' en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ uniforme. On note \vec{e}'_x , \vec{e}'_y et \vec{e}'_z les vecteurs unitaires liés à R' , en rotation à $\vec{\omega}$ par rapport à R . On suppose qu'à $t = 0$ les deux référentiels R et R' coïncident et qu'à tout instant $\vec{e}'_z = \vec{e}_z$.

Pour un point M quelconque, on désigne respectivement par \vec{v} et \vec{v}' les vitesses du point M par rapport aux référentiels R et R' et par \vec{a} et \vec{a}' les accélérations du point M par rapport aux mêmes référentiels. Pour un vecteur \vec{U} quelconque, on note $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R$ et $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{R'}$ les dérivées de \vec{U} dans les référentiels R et R' .

II.B.1) Déterminer la projection des vecteurs \vec{e}'_x et \vec{e}'_y sur la base des vecteurs \vec{e}_x et \vec{e}_y .

II.B.2) En déduire l'expression de $\left(\frac{d\vec{e}'_x}{dt}\right)_R$ en fonction de $\vec{\omega}$ et \vec{e}'_x uniquement, ainsi que l'expression de $\left(\frac{d\vec{e}'_y}{dt}\right)_R$ en fonction de $\vec{\omega}$ et \vec{e}'_y .

II.B.3) Déterminer l'expression de \vec{v} en fonction de \vec{v}' , $\vec{\omega}$ et \vec{OM} .

II.B.4) Déterminer l'expression de \vec{a} en fonction de \vec{a}' , \vec{v}' , $\vec{\omega}$ et \vec{OM} .

II.B.5) Montrer que pour une valeur particulière $\vec{\omega}_L$ de $\vec{\omega}$, on a :

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} + \vec{\omega}_L \wedge (\vec{\omega}_L \wedge \vec{OM})$$

et préciser l'expression de $\vec{\omega}_L$ (pulsation de Larmor) en fonction de $\vec{\omega}_1$.

II.B.6) On admet que la force \vec{F} conduit, en l'absence de champ magnétique \vec{B} , à des trajectoires électroniques circulaires de pulsation ω_0 dans R . En déduire que le terme $\vec{\omega}_L \wedge (\vec{\omega}_L \wedge \vec{OM})$ est négligeable devant le terme \vec{F}/m et écrire l'équation différentielle approchée vérifiée par \vec{a}' . Commenter.

II.B.7) On considère les trajectoires circulaires dans le référentiel R' qui sont contenues dans un plan orthogonal au champ magnétique \vec{B}_1 . Montrer que le résultat précédent permet de prédire l'existence, dans R , de mouvements circulaires de sens opposés et de pulsations ω_+ et ω_- (on choisira $\omega_+ > \omega_- > 0$) et donner l'expression de ces pulsations en fonction de ω_0 et ω_1 . Représenter dans le plan Oxy ces trajectoires en précisant dans chaque cas les sens de parcours.

II.B.8) On considère les trajectoires circulaires dans le référentiel R' qui sont contenues dans un plan contenant le champ magnétique \vec{B}_1 (on peut par exemple prendre des trajectoires dans le plan $Ox'z'$). On note a le rayon de la trajectoire. Déterminer l'expression des coordonnées $x'(t)$ et $z'(t)$ en fonction de a et ω_0 . Montrer que, dans R , le mouvement peut se voir comme la superposition d'un mouvement sinusoïdal selon Oz et de deux mouvements circulaires dans le plan Oxy , dont on précisera les caractéristiques.

II.B.9) On considère enfin le cas d'une trajectoire circulaire dans R' dans un plan dont la normale fait avec l'axe Oz' un angle α quelconque. Décrire qualitativement l'évolution, dans le référentiel R , du plan de la trajectoire et préciser en particulier la surface décrite par le vecteur $\vec{L}'(O) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}'$. Montrer que dans le cas du mouvement circulaire quelconque dans R' , on peut toujours décomposer le mouvement dans R en deux mouvements circulaires et un mouvement rectiligne de pulsations différentes que l'on précisera.

II.C – Aspect énergétique

Dans cette sous partie, on se place dans le référentiel R galiléen et on considère que l'électron soumis à la force \vec{F} et placé éventuellement dans le champ magnétique \vec{B}_1 a une trajectoire circulaire dans le plan Oxy à la pulsation ω (à priori ici quelconque).

II.C.1) Variation d'énergie mécanique

- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle E_p associée à la force \vec{F} .
- En déduire l'expression de l'énergie $E = E_c + E_p$ de l'électron dans le cas particulier du mouvement circulaire de pulsation ω en fonction de m , ω et k .
- On considère l'évolution de la trajectoire d'un électron entre une rotation circulaire uniforme à ω_0 dans le plan Oxy en l'absence de champ magnétique et une rotation circulaire uniforme à $\omega_+ = \omega_0 + \omega_1/2$ dans le plan Oxy en présence du champ magnétique \vec{B}_1 . On suppose $\omega_1 \ll \omega_0$. Calculer l'expression approchée de la variation relative $\Delta E/E$ de l'énergie E entre ces deux états. On exprimera le résultat en fonction ω_0 et ω_1 uniquement.
- Cette variation d'énergie peut-elle avoir été causée par la force due au champ magnétique? Justifier brièvement.
- Proposer une explication qualitative des causes de cette variation d'énergie.

II.C.2) Étude du régime transitoire

On s'intéresse ici à l'évolution du champ magnétique dans lequel est placé l'atome. On note $\vec{B} = B(t)\vec{e}_z$ la valeur instantanée du champ magnétique, $B(t)$ variant de 0 à B_1 . On considère que ce champ est uniforme. On cherche l'expression du potentiel vecteur \vec{A} duquel dérive le champ magnétique. On se place en coordonnées cylindriques d'axe Oz (cf figure 6) et on impose, d'une part la nullité du potentiel sur l'axe et d'autre part, la relation de jauge de Coulomb $\text{div } \vec{A} = \vec{0}$.

- Préciser les dépendances en coordonnées de chaque composante du potentiel vecteur.
- Déterminer l'expression de \vec{A} .

On suppose que l'établissement du champ magnétique B est suffisamment lent pour que l'évolution de la trajectoire d'un électron sur une période soit faible et que l'on puisse considérer celle-ci quasi circulaire. On supposera de même que le moment cinétique en O de l'électron varie peu lors de l'établissement du champ, de sorte qu'on pourra à tout instant le confondre avec le moment cinétique initial.

- Montrer que la quantité rv peut alors être considérée constante. On notera C cette valeur.
- Déterminer le travail infinitésimal reçu par un électron pendant dt lors de l'établissement du champ magnétique, dû aux forces autres que l'attraction électrostatique exercée par l'atome.
- En déduire l'expression du travail total W de ces forces lors de l'établissement du champ et exprimer W en fonction de e , C et B_1 .
- Comparer l'expression de W à la variation ΔE d'énergie mécanique obtenue précédemment. Commenter.

III Étude des ondes électromagnétiques émises

III.A – Structure de l'onde émise

On s'intéresse dans cette partie aux ondes électromagnétiques émises par un système constitué d'une particule fixe de charge e , placée à l'origine O du référentiel d'étude et d'une particule mobile de charge $-e$ placée en M . On suppose que les coordonnées du point M sont de la forme :

$$\begin{cases} x(t) &= a \cos(\omega_+ t) + b \cos(\omega_- t) \\ y(t) &= a \sin(\omega_+ t) - b \sin(\omega_- t) \\ z(t) &= c \cos(\omega t) \end{cases}$$

avec $\omega_+ = \omega + \omega_1/2$ et $\omega_- = \omega - \omega_1/2$.

On donne de plus, pour un dipôle électrique $\vec{p}(t)$ variable placé en O , l'expression du champ électromagnétique créé par ce dipôle à l'instant t en un point M « très éloigné » du dipôle :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{K}{r^5} \left(\left(\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right)_{t-r/c} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \wedge \overrightarrow{OM}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

avec K constant, $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$ et où la notation $\left(\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right)_{t-r/c}$ signifie que la dérivée doit être estimée à l'instant $t - r/c$.

Enfin on introduit les vecteurs unitaires $\vec{e}_+(t) = \cos(\omega_+ t) \vec{e}_x + \sin(\omega_+ t) \vec{e}_y$ et $\vec{e}_-(t) = \cos(\omega_- t) \vec{e}_x - \sin(\omega_- t) \vec{e}_y$.

III.A.1) On considère un dipôle de direction fixe $\vec{p} = p(t) \vec{e}_z$. Déterminer l'expression du champ électrique créé par ce dipôle en un point M quelconque en fonction des coordonnées sphériques relatives à M (cf figure 7).

III.A.2) Proposer une interprétation qualitative du terme $t - r/c$.

III.A.3) Montrer à l'aide de schémas que le système des deux charges précédemment défini peut être vu comme la superposition de deux dipôles de norme constante tournant en sens opposés dans un plan P_1 et d'un dipôle oscillant de manière harmonique orthogonalement à P_1 . Préciser le plan P_1 .

III.A.4) On prend un point M_1 de l'axe Ox situé à grande distance de O . Déterminer l'expression du champ électrique rayonné par le système des charges au niveau du point M_1 . On exprimera le champ en fonction de K , e , r , a , b , c , ω , ω_+ , ω_- , $\cos(\omega(t - r/c))$, $\sin(\omega_+(t - r/c))$ et $\sin(\omega_-(t - r/c))$. Montrer que ce champ peut être vu comme la superposition de trois champs de polarisations rectilignes et de pulsations différentes et préciser sur un schéma.

III.A.5) On prend maintenant un point M_2 de l'axe Oz situé à grande distance de O . Déterminer de même l'expression du champ électrique rayonné par le système des charges au niveau du point M_2 . Montrer que ce champ peut être vu comme la superposition de deux champs polarisés circulairement de pulsations différentes. Préciser sur un schéma.

III.A.6) La figure 2 représente une partie du spectre d'émission pour un mélange d'atomes d'hydrogène (nombre de charge $Z = 1$, nombre de masse $A = 1$) et de deutérium (nombre de charge $Z = 1$, nombre de masse $A = 2$) placé dans un champ magnétique extérieur. La direction d'observation est perpendiculaire au champ magnétique. L'axe des ordonnées représente une grandeur proportionnelle à l'intensité. On observe deux groupes de trois raies d'émission, la différence d'intensité relative de ces raies est due à des effets dont on n'a pas tenu compte dans cette étude.

a) Expliquer qualitativement la présence de ces deux groupes.

b) On s'intéresse uniquement aux raies comprises entre les traits verticaux en pointillé. On note λ_0 la longueur d'onde émise en l'absence de champ magnétique et $\Delta\lambda$ l'écart maximal entre les raies émises en présence de champ magnétique. On a $\Delta\lambda \ll \lambda_0$. Déterminer l'expression approchée de l'intensité B_1 du champ magnétique régnant au voisinage de l'atome émettant ce rayonnement en fonction de m , e , λ_0 , $\Delta\lambda$ et de la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide c . Faire l'application numérique.

III.B – Étude d'un polarimètre

III.B.1) Paramètres de Stokes

Pour une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant selon l'axe Oz dans le sens des z croissants, on donne en notation complexe

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)}$$

On définit de même quatre paramètres, appelés paramètres de Stokes par les relations : $I = \underline{AA}^* + \underline{BB}^*$, $Q = \underline{AA}^* - \underline{BB}^*$, $U = \underline{AB}^* + \underline{A}^*B$, $V = i(\underline{A}^*B - \underline{AB}^*)$.

a) On considère une onde polarisée rectilignement caractérisée par son amplitude E_0 et par l'angle α entre l'axe Ox et la direction du champ électrique. Déterminer l'expression des paramètres de Stokes relatifs à cette onde.

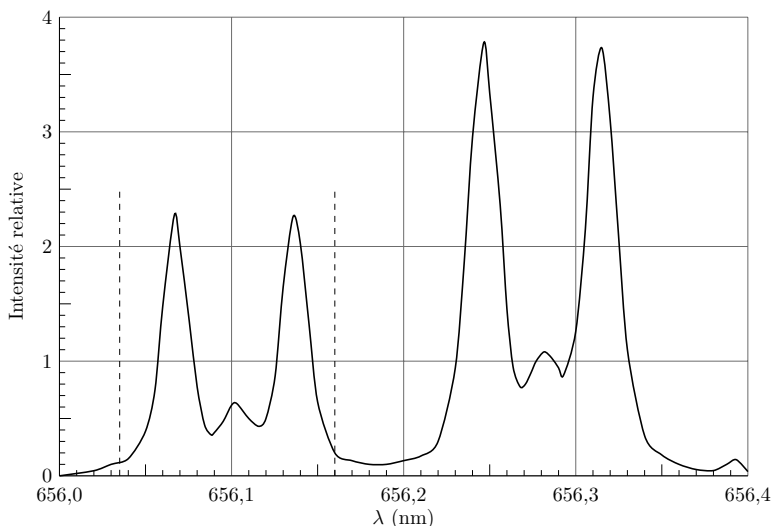


Figure 2 Spectre Zeeman d'un mélange hydrogène deutérium d'après C.C. CHU et J.D. HEY Contrib. Plasma Phys. **40**(2000) 5-6, 597-606

b) Même question pour une onde d'amplitude E_0 de polarisation circulaire droite.

c) On donne enfin une onde dont les paramètres de Stokes sont les suivants : $I = E_0^2$, $Q = 0$, $U = 0$, $V = E_0^2$. Déterminer les amplitudes complexes \underline{A} et \underline{B} de cette onde et déterminer sa polarisation.

On admettra par la suite que la donnée des quatre paramètres I , Q , U , V permet systématiquement de faire cette détermination.

III.B.2) Dispositif à lames à retard

On considère un dispositif constitué de deux lames à retard L_1 , L_2 et d'un polariseur P tous orthogonaux à l'axe Oz . On étudie l'action de ce dispositif sur une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant selon l'axe Oz dans le sens des z croissants, dont la notation complexe est toujours

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)}$$

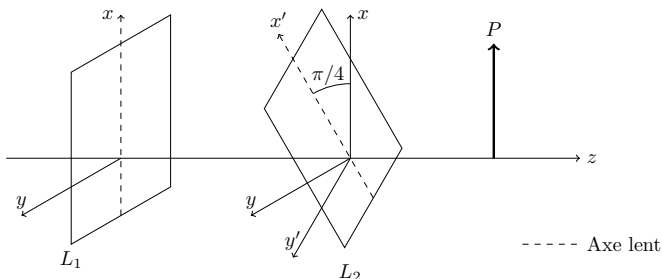


Figure 3

La lame L_1 (respectivement L_2) comporte un axe lent et un axe rapide, la propagation de la composante du champ électrique colinéaire à l'axe lent se faisant avec un retard de phase φ_1 (respectivement φ_2) par rapport à la composante colinéaire à l'axe rapide. Cette propagation s'effectue sans aucune atténuation. L'axe lent de L_1 est selon Ox , celui de L_2 fait un angle $\beta = +\pi/4$ avec l'axe Ox et le polariseur a sa direction de polarisation colinéaire à Ox .

a) Déterminer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, à un terme multiplicatif près, l'expression des coordonnées de \vec{E}_1 , amplitude complexe du champ en sortie de la lame L_1 .

b) Déterminer de même dans la base $(\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}_z)$ issue d'une rotation $\pi/4$ de la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, à un terme multiplicatif près, l'expression des coordonnées de \vec{E}_2 , amplitude complexe du champ en sortie de la lame L_2 .

c) En déduire que l'intensité lumineuse en sortie de polariseur I_P peut s'écrire :

$$I_P = K' (I + Q \cos \varphi_2 + (U \sin \varphi_1 - V \cos \varphi_1) \sin \varphi_2)$$

où K' est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer et où I , Q , U et V sont les paramètres de Stokes de l'onde incidente.

d) Donner les expressions de I_P pour (φ_1, φ_2) prenant les couples de valeurs suivantes : $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(0, \pi/2)$, $(0, 3\pi/2)$, $(\pi/2, \pi/2)$ et $(\pi/2, 3\pi/2)$.

III.C – Application

III.C.1) Résolution spectrale et polarisation

On donne figure 4 les spectres des rayonnements issus du polarimètre pour les configurations I , $I+V$ et $I-V$ (axe vertical vers le bas). Justifier l'allure de la figure obtenue. Quel est l'intérêt du polarimètre dans l'étude spectrale du rayonnement mis en évidence ici ?

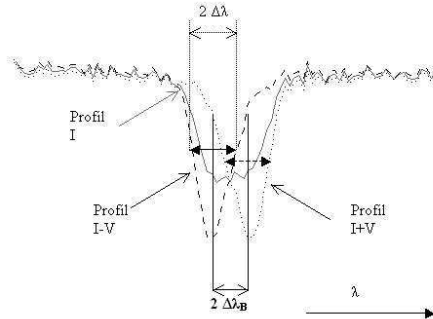


Figure 4

III.C.2) Orientation du champ \vec{B}_1

Dans une configuration réelle, le champ magnétique \vec{B}_1 n'est ni parallèle, ni orthogonal à la direction de visée de l'étoile. On note γ l'angle entre \vec{B}_1 et cette direction (cf figure 5).



Figure 5

On note $B_{1\parallel} = B_1 \cos \gamma$ et $B_{1\perp} = B_1 \sin \gamma$. Quels sont les réglages du polarimètre qui permettent, au niveau du rayonnement reçu, de s'affranchir de l'influence de $B_{1\parallel}$? Même question pour $B_{1\perp}$. En déduire un autre intérêt du polarimètre pour la caractérisation de champs magnétiques.

Données et notations

Dans tout le problème i désigne le complexe tel que $i^2 = -1$.

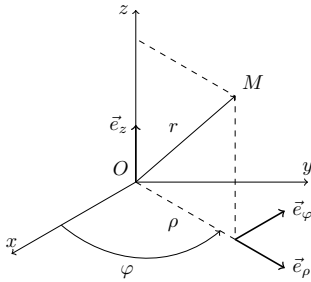


Figure 6 Coordonnées cylindriques

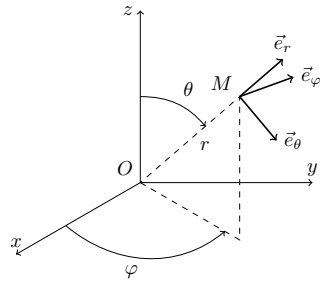


Figure 7 Coordonnées sphériques

Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse d'un électron	$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse d'un proton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Rotationnel en coordonnées cylindriques

$$\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

Divergence en coordonnées cylindriques

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

• • • FIN • • •