



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures

Calculatrices autorisées

# Mathématiques 1

PC

2012

Si  $n$  et  $k$  sont deux entiers naturels, on note  $\binom{n}{k}$  le nombre de parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments.

## I Approximation

### I.A – Quelques calculs préliminaires

Dans cette sous-partie,  $x$  est un nombre réel et  $n$  est un entier naturel.

I.A.1) Montrer que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$ .

I.A.2) Montrer que  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$ .

I.A.3) Montrer que  $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$ .

I.A.4) Dédurre des questions précédentes que

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

### I.B – Étude de $S(x)$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ . Le but de cette sous-partie est de majorer la somme

$$S(x) = \sum_{k=0}^n \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

#### I.B.1) Majoration de $S(x)$ : première méthode

On note

- $V$  l'ensemble des entiers  $k \in \{0, \dots, n\}$  tels que  $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,
- $W$  l'ensemble des entiers  $k \in \{0, \dots, n\}$  tels que  $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,

et on pose

$$S_V(x) = \sum_{k \in V} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{et} \quad S_W(x) = \sum_{k \in W} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

a) Montrer que  $S_V(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

b) Montrer que  $S_W(x) \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$ .

c) En déduire que  $S(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}$ .

#### I.B.2) Majoration de $S(x)$ : seconde méthode

a) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni de son produit scalaire canonique.

b) À l'aide de la question I.A.4, en déduire que  $S(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .

**I.C – Application à l'approximation uniforme**

Dans cette sous-partie, on note  $\mathcal{C}$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On munit  $\mathcal{C}$  de la norme de la borne supérieure, notée  $\| \cdot \|_{\infty}$  :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Pour  $f \in \mathcal{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit le  $n$ -ième polynôme de Bernstein de  $f$ , noté  $B_n(f)$ , en posant, pour tout  $x \in [0, 1]$

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but de cette sous-partie est d'étudier  $\|B_n(f) - f\|_{\infty}$  lorsque  $f$  est un élément de  $\mathcal{C}$  vérifiant une hypothèse additionnelle.

**I.C.1) Un exemple**

Si  $f(x) = x^2$  pour tout  $x \in [0, 1]$ , déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le polynôme  $B_n(f)$  et en déduire la valeur de  $\|B_n(f) - f\|_{\infty}$ .

**I.C.2)** Soit  $f \in \mathcal{C}$ . Montrer, pour tout  $x \in [0, 1]$ , la relation

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \left( f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

**I.C.3)** a) Montrer que si  $f$  est  $\delta$ -lipschitzienne, alors  $\|B_n(f) - f\|_{\infty} \leq \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

b) En déduire que si  $f$  est de classe  $C^1$ , alors il existe un réel  $c$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|B_n(f) - f\|_{\infty} \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$ .

c) Étendre le résultat précédent au cas où  $f$  est une fonction continue, de classe  $C^1$  par morceaux.

**I.C.4)** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $C^1$  par morceaux. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel  $r > 0$ , il existe un polynôme  $P$  à coefficients réels tel que  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $f(x) - r \leq P(x) \leq f(x) + r$ .

**II Un théorème de Hardy-Littlewood**

Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle. On suppose que la série entière associée  $\sum a_n x^n$  admet pour rayon de convergence  $R_a = 1$  et que la somme  $f$  de cette série, définie par

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

vérifie

$$f(x) \sim \frac{1}{1-x} \quad \text{quand } x \rightarrow 1, \quad x < 1. \quad (\text{II.1})$$

On note

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{et} \quad \tilde{a}_n = \frac{A_n}{n+1}.$$

Ainsi,  $\tilde{a}_n$  est la moyenne arithmétique des nombres  $a_0, \dots, a_n$ .

Le but de cette partie est d'étudier le comportement des  $a_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. On s'intéresse en particulier aux deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad (\text{II.2})$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n = 1 \quad (\text{II.3})$$

**II.A – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.2**

**II.A.1)** Déterminer une suite réelle  $(b_n)_{n \geq 0}$  telle que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

**II.A.2)** En déduire un exemple de suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  vérifiant II.1 mais ne convergeant pas vers 1.

**II.B – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.3**

**II.B.1)** Donner le développement en série entière de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2}$  ainsi que son rayon de convergence. Préciser si la série converge aux bornes de l'intervalle de convergence.

**II.B.2)** On considère les fonctions  $\varphi : x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)^2}$  et  $\psi : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2(1-x)}$ . Déterminer des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n.$$

On explicitera en fonction de  $n$ , suivant la parité de  $n$ , les réels  $u_n$  et  $v_n$ .

**II.B.3)** Calculer  $\bar{v}_n$  (moyenne arithmétique des nombres  $v_0, \dots, v_n$ ).

**II.B.4)** Construire à l'aide de  $\psi$  un exemple de suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  vérifiant II.1 mais ne vérifiant pas la propriété II.3.

Jusqu'à la fin de cette partie, on continue de supposer II.1 et on fait l'hypothèse supplémentaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0. \quad (\text{II.4})$$

L'objectif principal, après quelques observations concernant la suite  $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0}$ , est de démontrer la propriété II.3 (théorème de Hardy et Littlewood).

**II.C – Majoration de la suite  $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0}$** 

**II.C.1)** Pour tout  $x \in [0, 1[$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $f(x) \geq A_n x^n$ .

**II.C.2)** Montrer l'existence d'un entier  $N > 0$  tel que

$$\forall n \geq N, f(e^{-1/n}) \leq \frac{2}{1 - e^{-1/n}}.$$

**II.C.3)** En déduire que la suite  $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0}$  est majorée.

**II.D – Minoration, à partir d'un certain rang, de  $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0}$  par un réel  $> 0$** 

On désigne par  $\mu > 0$  un majorant de la suite  $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0} : \forall n \in \mathbb{N}, \tilde{a}_n \leq \mu$ .

**II.D.1)** a) Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , montrer que  $(1-x) \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = f(x)$ .

b) En déduire que pour tout  $x \in [0, 1[$  et tout  $N \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{f(x)}{1-x} \leq A_{N-1} \frac{1-x^N}{1-x} + \mu \sum_{k=N}^{+\infty} (k+1)x^k.$$

c) En déduire que pour tout  $x \in [0, 1[$  et tout  $N \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) \leq A_{N-1} + \mu \left( (N+1)x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x} \right).$$

**II.D.2)** Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un entier  $N_0 > 0$  tel que pour tout  $N \geq N_0$ ,

$$f(e^{-\lambda/N}) \geq \frac{1}{2(1 - e^{-\lambda/N})} \geq \frac{N}{2\lambda}.$$

b) Montrer que pour tout  $N \geq N_0$

$$\tilde{a}_{N-1} \geq \frac{1}{2\lambda} - \mu e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{N} + e^{-\lambda/N} \frac{1}{N(1 - e^{-\lambda/N})} \right).$$

c) Déterminer en fonction de  $\lambda$  la limite, quand  $N$  tend vers l'infini, du membre de droite dans l'inégalité précédente.

d) Montrer qu'il existe un réel  $\lambda > 0$  tel que cette limite soit strictement positive.

**II.D.3)** Conclure qu'il existe un réel  $\nu > 0$  tel qu'à partir d'un certain rang on ait  $\tilde{a}_n \geq \nu$ .

**II.E – Démonstration de la propriété II.3, due à Karamata**

Soit  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction telle que  $g(x) = 1/x$  si  $x \geq e^{-1}$  et  $g(x) = 0$  sinon.

On fixe un réel  $\varepsilon \in ]0, e^{-1}[$ . On définit deux applications continues  $g^+, g^- : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ainsi :

- $g^+$  est affine sur  $[e^{-1} - \varepsilon, e^{-1}]$  et coïncide avec  $g$  sur  $[0, e^{-1} - \varepsilon] \cup [e^{-1}, 1]$ ;
- $g^-$  est affine sur  $[e^{-1}, e^{-1} + \varepsilon]$  et coïncide avec  $g$  sur  $[0, e^{-1}[ \cup [e^{-1} + \varepsilon, 1]$ .

Pour tout entier  $N > 0$  on pose  $x_N = e^{-1/N}$ .

On rappelle que dans cette sous-partie, on fait les hypothèses II.1 et II.4

**II.E.1)** Calculer  $\int_0^1 g^+(t) dt$  et  $\int_0^1 g^-(t) dt$ .

**II.E.2)** Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels. Montrer que

$$(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} \int_0^1 P(t) dt.$$

On considérera d'abord le cas particulier  $P(x) = x^k$ , où  $k \in \mathbb{N}$ .

**II.E.3)** Établir l'existence de deux polynômes  $P, Q$  à coefficients réels tels que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g^-(x) - \varepsilon \leq P(x) \leq g(x) \leq Q(x) \leq g^+(x) + \varepsilon.$$

**II.E.4)** Établir l'existence d'un entier  $N_1 > 0$  tel que pour tout entier  $N \geq N_1$ ,

$$(1-x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n P(x_N^n) \geq \int_0^1 P(t) dt - \varepsilon$$

et

$$(1-x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n Q(x_N^n) \leq \int_0^1 Q(t) dt + \varepsilon.$$

**II.E.5)** Dédire des trois questions précédentes que pour tout entier  $N \geq N_1$

$$1 - 5\varepsilon \leq (1-x_N)A_N \leq 1 + 5\varepsilon.$$

**II.E.6)** Conclure.

---

• • • FIN • • •

---