EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Les trois parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

On s'intéresse ici aux propriétés de la fonction polylogarithme, définie comme série entière et à son prolongement grâce à une représentation intégrale. On établit aussi quelques formules générales et on complète l'étude par celle d'un cas particulier.

Partie I : le polylogarithme

Dans toute cette partie, α est un réel fixé.

I - 1.1.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière L_α définie par :

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

I - 1.2.

Justifier que l'application L_α est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

I - 1.3.

Montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2).$$

I - 2.1.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, établir une relation entre $L'_{\alpha+1}(x)$ et $L_\alpha(x)$.
Exprimer $L_{\alpha+1}(x)$ sous forme de l'intégrale entre 0 et x d'une certaine fonction.

I - 2.2.

Pour $x \in]-1, 1[$, préciser les valeurs de $L_\alpha(x)$ lorsque $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ et $\alpha = 1$.

I - 3.

Dans cette question, on suppose que $\alpha \leqslant 1$.
Montrer que $L_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures. Pour cela, on pourra chercher à minorer $L_\alpha(x)$ pour $x \in]0, 1[$.

Partie II : prolongement pour $\alpha > 1$

Dans toute cette partie, α est un réel strictement supérieur à 1.

II - 1.1.

Montrer que la fonction L_α définie en I -1.1 est continue sur $[-1, 1]$.

II - 1.2.

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} L'_2(x)$ et préciser si la fonction L_2 est dérivable en 1.

II - 2.1.

Montrer que l'application $\varphi\ : u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - 1}$ est intégrable sur $]\,0, +\infty\,[$.

II - 2.2.

Pour tout réel $x \leqslant 1$, justifier l'existence de $K_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - x}\,\mathrm{d}u$.

II - 2.3.

Montrer que l'application K_α ainsi définie est continue sur l'intervalle $]-\infty, 1]$.

II - 2.4.

Dans cette question, on suppose que $\alpha > 2$.
Montrer que la fonction K_α est de classe C^1 sur l'intervalle $]-\infty, 1]$.

II - 2.5.

On revient au cas général où $\alpha > 1$.
Montrer que la fonction K_α est de classe C^1 sur tout segment $[a, b]$ avec $a < b < 1$, puis sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.

II - 3.1.

Prouver l'existence de $G_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et justifier que $G_\alpha > 0$.

II - 3.2.

Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et pour tout $u > 0$, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^u - x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \mathrm{e}^{-(k+1)u}.$$

II - 3.3.

En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$, en utilisant $L_\alpha(x)$ défini dans I - 1.1 et $K_\alpha(x)$ défini dans II - 2.2, on a la relation :

$$xK_\alpha(x) = G_\alpha L_\alpha(x).$$

On précisera avec soin le théorème d'intégration terme à terme utilisé.

II - 4.1.

Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, on prolonge la définition de $L_\alpha(x)$ en posant :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - x} \, \mathrm{d}u.$$

Montrer que l'application L_α ainsi définie est continue sur $]-\infty, 1]$ et de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$.

II - 4.2.

Montrer que pour tout réel $x \leqslant 1$, on a :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1 - xt} \, \mathrm{d}t.$$

II - 4.3.

Justifier que l'on peut prolonger la fonction L_α sur $\mathbb{C} \setminus]1, +\infty[$ par la définition :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus]1, +\infty[, \; L_\alpha(z) = \frac{z}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z} \, \mathrm{d}u.$$

Montrer alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $z^2 \notin]1, +\infty[$, on a encore la relation :

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(z^2).$$

Partie III : le cas $\alpha = 2$

On s'intéresse ici, pour tout $x \in [-1,1]$, à : $L_2(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

III - 1.1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire, telle que :

$$\forall x \in]0, \pi], \; f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Calculer les coefficients de Fourier « $b_n(f)$ » pour $n \in \mathbb{N}^*$.

III - 1.2.

Grâce à l'égalité de Parseval que l'on précisera, appliquée à f, en déduire la valeur de $L_2(1)$. Calculer aussi $L_2(-1)$.

III - 2.1.

Montrer que la fonction Φ définie par :

$$\forall x \in]0,1[,\ \Phi(x) = L_2(x) + L_2(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$$

est de classe C^1 sur $]0,1[$.

III - 2.2.

Montrer que la fonction Φ est constante sur $]0,1[$ et vaut $L_2(1)$.

III - 2.3.

En déduire la valeur de $L_2\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

III - 2.4.

Prouver aussi que :

$$\forall x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right],\ L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2.$$

III - 3.

Grâce à II - 3, calculer $\displaystyle K_2(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1}\,du$.

III - 4.

Désormais, on s'intéresse au prolongement de L_2 considéré en II - 4, vérifiant en particulier la relation vue en II-4.2 dont on partira pour traiter les questions suivantes, c'est-à-dire :

$$\forall x < 0,\ L_2(x) = -\frac{x}{G_2}\int_0^1 \frac{\ln(s)}{1 - xs}\,ds.$$

III - 4.1.

Montrer alors que pour tout $x < 0$, on a aussi les égalités :

$$L_2(x) = -\int_x^0 \frac{\ln\left(\dfrac{t}{x}\right)}{1-t}\,dt = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.$$

On pourra effectuer un changement de variable et une intégration par parties.

III - 4.2.

Pour tout $x < 0$, calculer $\displaystyle g(x) = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t-1}\,dt$.

III - 4.3.

Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle A = \int_{-\infty}^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}\,dt$.

III - 4.4.

Préciser $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (L_2(x) - g(x))$. En déduire un équivalent simple de $L_2(x)$ quand x tend vers $-\infty$, cet équivalent dépendant de $\ln(-x)$.

Fin de l'énoncé