

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2012

FILIÈRE MP

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – B – (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

## Valeurs d'adhérence de séries entières sur le cercle de convergence

La notation  $i$  étant réservée (c'est un nombre complexe dont le carré est  $-1$ ) les candidats éviteront de l'utiliser à d'autres fins, par exemple comme indice de suite, de sommation ou de produit.

## Première partie : convergence au sens de Césaro

Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres complexes. On dit qu'elle est  $C$ -convergente si la suite  $(m_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$\forall n \geq 0, \quad m_n = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1}$$

est convergente et on appelle alors  $C$ -limite de  $(a_n)_{n \geq 0}$  la limite de la suite  $(m_n)_{n \geq 0}$ .

1. Montrer que toute suite convergente est  $C$ -convergente et donner un exemple de suite  $C$ -convergente mais non convergente.

2. Montrer que si la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  est  $C$ -convergente, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ .

3. Montrer que pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , la suite de terme général  $a_n = (-1)^n n^\alpha$  est  $C$ -convergente.

Si  $(b_n)_{n \geq 0}$  est une suite de nombre complexes, on dit que la série  $\sum b_n$  est  $C$ -convergente si la suite des sommes partielles de la série est  $C$ -convergente et la  $C$ -limite de la suite des sommes partielles sera appelée  $C$ -limite de la série.

Soit  $\sum c_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . On note pour tout  $n \geq 0$ ,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k, \quad \sigma_n(z) = \frac{S_0(z) + S_1(z) + \cdots + S_n(z)}{n+1}.$$

4. Soit  $z_0$  un nombre complexe tel que la série  $\sum c_n z_0^n$  soit  $C$ -convergente. Montrer que  $|z_0| \leq R$ .

Si  $z_0 \in \mathbf{C}$  est tel que  $\sum c_n z_0^n$  est  $C$ -convergente, on note  $\sigma(z_0)$  sa  $C$ -limite. On note  $F$  l'ensemble des nombres complexes de module  $R$  pour lesquels la série est  $C$ -convergente.

5. Pour chacune des séries entières  $\sum c_n z^n$  suivantes, déterminer le rayon de convergence, l'ensemble  $F$  et la valeur de  $\sigma(z)$  pour tout  $z \in F$ .

5a.  $\forall n \in \mathbf{N}, c_n = 1$ .

5b.  $\forall n \in \mathbf{N}, c_{2n} = \alpha, c_{2n+1} = \alpha + \beta, \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \beta \neq 0, 2\alpha + \beta \neq 0$ .

5c.  $\forall n \in \mathbf{N}, c_n = 1 + \alpha e^{in\lambda}, \alpha \in ]0, 1[, \lambda \in \mathbf{R}$ .

### Deuxième partie : un théorème de Kronecker

On rappelle que des nombres réels  $x_1, \dots, x_m$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$  s'ils forment un système libre de  $\mathbf{R}$  considéré comme  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel.

Soit  $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues bornées de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$ . Il est muni de la norme définie pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|.$$

Si  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on désigne par  $e_\lambda \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  la fonction définie par  $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$ . Soit  $\mathcal{E}$  le sous-espace de  $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  engendré par les fonctions  $e_\lambda, \lambda \in \mathbf{R}$ .

6a. Montrer que pour tout  $f \in \mathcal{E}$ , la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt$  admet une limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  qu'on note  $M(f)$ . Vérifier que  $f \mapsto M(f)$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{E}$ .

6b. Montrer que  $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$  est une base de  $\mathcal{E}$  et que pour tout  $f \in \mathcal{E}$ ,  $M(f)$  est la coordonnée de  $f$  suivant  $e_0$  dans la base des  $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ .

6c. Montrer que si  $f, g \in \mathcal{E}$  alors il en est de même de  $fg$ . Dans le cas où  $g$  est à valeurs réelles positives, établir que  $|M(fg)| \leq \|f\|_\infty M(g)$ .

7. On pose pour tout entier  $N \geq 0, K_N = \sum_{j=-N}^N \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e_j$ .

7a. Montrer que  $K_N(t) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{2j}{N+1} \cos((N+1-j)t)$ .

7b. Montrer que pour tout  $t \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ ,

$$\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \sum_{k=0}^N e^{i\left(\frac{N}{2}-k\right)t} \text{ puis que } K_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2.$$

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier  $n \geq 1$ , des nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$  linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$ , des nombres réels positifs  $r_0, \dots, r_{n+1}$  et des nombres réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ .

Pour  $j = 1, \dots, n+1$ , on pose  $a_j = r_j e^{i\alpha_j}$  et pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) = r_0 + \sum_{j=1}^{n+1} a_j e^{i\lambda_j x}$ .

8. Pour tout entier  $N \geq 0$ , on pose  $g_N(x) = \prod_{p=1}^{n+1} K_N(\lambda_p x + \alpha_p)$ .

8a. Écrire  $g_N$  comme combinaison linéaire de fonctions  $e_\lambda$  avec  $\lambda$  de la forme

$$\lambda = k_1 \lambda_1 + \dots + k_{n+1} \lambda_{n+1}, \quad k_i \in \{-N, \dots, N\}.$$

En déduire que  $M(g_N) = 1$ .

8b. Montrer que  $M(fg_N) = r_0 + \frac{N}{N+1} \sum_{j=1}^{n+1} r_j$ .

8c. En déduire que  $\|f\|_\infty = \sum_{j=0}^{n+1} r_j$ , (on pourra utiliser 6c).

9. Soient  $u_1, \dots, u_m$  des nombres complexes de module 1 et  $\varepsilon$  un réel strictement positif. On suppose que  $|u_1 + \dots + u_m| \geq m - \varepsilon$ . Montrer que si  $k \neq j$  on a  $|u_k + u_j| \geq 2 - \varepsilon$  et  $|u_k - u_j| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$ .

Dans la suite on suppose de plus que  $\lambda_{n+1} = 2\pi$ ,  $r_j = 1$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n+1\}$  et  $\alpha_{n+1} = 0$ , de sorte que  $f(x) = 1 + \sum_{j=1}^n e^{i\alpha_j} e^{i\lambda_j x} + e^{i2\pi x}$ .

10a. Montrer qu'il existe une suite de nombres réels  $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$  telle que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} |f(x_m)| = n+2$ .

10b. Montrer qu'une telle suite  $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$  vérifie pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j x_m} = e^{-i\alpha_j}, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i2\pi x_m} = 1.$$

10c. Posons  $x_m = N_m + y_m$ , avec  $y_m \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  et  $N_m \in \mathbf{Z}$ . Montrer que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} y_m = 0$ , puis que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j N_m} = e^{-i\alpha_j}$ .

11. Dans cette question, on considère le cas particulier où  $\alpha_j = \pi$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , de sorte que  $f(x) = 1 - \sum_{j=1}^n e^{i\lambda_j x} + e^{i2\pi x}$ .

11a. Montrer que sur tout intervalle fermé borné  $I$  de  $\mathbf{R}$ ,  $\sup_{x \in I} |f(x)| < n+2$ .

11b. En déduire l'existence d'une suite  $(N'_m)_{m \in \mathbf{N}}$  d'entiers relatifs telle que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} N'_m = \pm\infty$

et pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j N'_m} = -1$ . Que peut-on dire des suites  $(e^{i2\lambda_j N'_m})_{m \in \mathbf{N}}$  ?

12. Dédurre de ce qui précède le théorème suivant.

**Théorème de Kronecker.** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels tels que  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \pi$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$ . Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des réels. Alors il existe une suite  $(N_m)_{m \in \mathbf{N}}$  d'entiers naturels tels que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} N_m = +\infty$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{i\lambda_j N_m} = e^{i\alpha_j}$ .

### Troisième partie : valeurs d'adhérence aux points de $C$ -convergence

On rappelle que  $\ell$  est une valeur d'adhérence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  s'il existe une application strictement croissante  $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  telle que  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\phi(n)}$ .

Les valeurs d'adhérence d'une série sont celles de la suite de ses sommes partielles. Si  $\sum c_n z^n$  est une série entière et  $z_0 \in \mathbf{C}$ , on note  $\mathcal{L}(z_0)$  l'ensemble des valeurs d'adhérence de la série  $\sum c_n z_0^n$ . Dans cette partie, on étudie l'ensemble  $\mathcal{L}(z_0)$ ,  $z_0 \in F$ , pour les exemples de la question 5. Les notations  $F$ ,  $\sigma(z)$  sont celles de la première partie.

13a. On reprend l'exemple 5a. Déterminer  $\mathcal{L}(e^{ix})$ , lorsque  $\frac{x}{\pi} \in \mathbf{Q}$ . Lorsque  $\frac{x}{\pi} \notin \mathbf{Q}$ , montrer que  $\mathcal{L}(e^{ix})$  est un cercle de centre  $\sigma(e^{ix})$  dont on déterminera le rayon.

13b. On reprend l'exemple 5b. On suppose que  $\frac{x}{\pi} \notin \mathbf{Q}$ ,  $\alpha \neq 0$  et  $\frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbf{R}$ . Montrer que  $\mathcal{L}(e^{ix})$  est réunion de deux cercles de centre  $\sigma(e^{ix})$  dont on déterminera les rayons.

13c. On reprend l'exemple 5c. On suppose que les nombres  $x, \lambda, \pi$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$ . Montrer que pour  $\alpha > 0$  suffisamment petit,

$$\mathcal{L}(e^{ix}) = \{\zeta \in \mathbf{C}; |\zeta - \sigma(e^{ix})| \in [r_1, r_2]\}$$

pour des réels  $0 < r_1 < r_2$  que l'on déterminera.

\* \*  
\*