CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice I

Soit $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Dans tout cet exercice, on identifie les éléments de $\mathbb{C}[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(*) \qquad P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1)$$

(1) Montrer que, si a est une racine de P alors $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont aussi des racines de P.

(2) Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geq 0}$ en posant, pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

(a) Vérifier que, lorsque a_0 est une racine de P, pour tout entier naturel n, le nombre complexe a_n est une racine de P.

(b) Montrer que, lorsque a_0 est un réel strictement positif, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs.

(c) En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.

(d) Montrer que -1 n'est pas racine de P.

(e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.

(3) Déduire des questions précédentes que, si a est une racine complexe de P, alors $|a+1| = 1$. On admettra que l'on a aussi $|a-1| = 1$.

(4) Montrer que si le degré de P est strictement supérieur à 0 alors P a pour unique racine 0.

(5) Déterminer alors tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(*)$.

Exercice II

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée définie comme l'ensemble des points du plan, $M(t)$, de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) &= \varphi(t) \\ y(t) &= t\varphi(t) \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Partie A

(1) Montrer que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et que le point P de coordonnées $(-1, 0)$ est élément de $\mathcal{C}$.

(2) Déterminer les points doubles, points stationnaires et asymptotes éventuels de la courbe $\mathcal{C}$.

(3) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal.
On pourra utiliser les approximations $\sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 0,5$ et $\varphi\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right) \approx -0,6$.

Partie B

(1) Soient a, b et t trois réels.

(a) Justifier, sans calculer explicitement les déterminants, la relation suivante :

$$\begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ a\varphi(a)-b\varphi(b) & a\varphi(a)-t\varphi(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ (a-b)\varphi(b) & (a-t)\varphi(t) \end{vmatrix}.$$

(b) En déduire alors :

$$\begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ a\varphi(a)-b\varphi(b) & a\varphi(a)-t\varphi(t) \end{vmatrix} = \frac{2(a-b)(a-t)(b-t)}{(a^2+1)(b^2+1)(t^2+1)} \begin{vmatrix} 1 & a+t \\ b+t & t^2-1 \end{vmatrix}.$$

(2) On définit pour a et b deux réels tels que $a+b \neq 0$ le réel

$$h(a,b) = -\frac{1+ab}{a+b}.$$

Lorsque $A = M(a)$ et $B = M(b)$ avec $a+b \neq 0$, on note $A \star B$ le point de la courbe $\mathcal{C}$ de paramètre $h(a,b)$, c'est-à-dire $M(h(a,b))$.

(a) On suppose que A et B sont deux points de $\mathcal{C}$, distincts, différents de O et non symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
Montrer que la droite (AB) recoupe $\mathcal{C}$ en l'unique point $A \star B$
Vérifier que $A \star B$ est différent de O.

(b) On suppose que A est différent de P.
Montrer que la tangente à $\mathcal{C}$, en A recoupe $\mathcal{C}$ en l'unique point $A \star A$.
Vérifier que $A \star A$ est différent de O et de P.

(3) On pose à présent $D = A \star B$, ainsi que $E = A' \star B$ et $F = D' \star E$ où A' et D' sont respectivement les symétriques de A et D par rapport à l'axe des abscisses.
Montrer que la droite (FA) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A. Illustrer graphiquement.

Exercice III

La partie C est indépendante des parties A et B à l'exception des questions 4 *et* 5.

On considère les suites de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(t) = \frac{1}{1+(t+2\pi n)^2} \quad \text{et} \quad v_n(t) = \frac{1}{1+(t-2\pi n)^2}$$

Partie A

(1) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et v_n convergent simplement sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit a un réel strictement positif.

(a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a).$$

(b) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et u'_n convergent uniformément sur $[-a,a]$.

On admettra qu'il en est de même pour les séries de fonctions de terme général v_n et v'_n.

(3) On pose $F = u_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$

(a) Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ecrire l'énoncé précis du théorème utilisé.

(b) Démontrer que F est paire.

(c) Démontrer que F est 2π-périodique.

Partie B

(1) Montrer que , pour tout entier naturel k,

$$\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+x^2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+(x+2n\pi)^2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+(x-2n\pi)^2}\mathrm{d}x$$

En déduire les coefficients de Fourier réels de la fonction F.

(2) Démontrer que, pour tout réel t, on a :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt)$$

où l'on précisera l'expression des réels a_k.

(3) (a) Montrer que, pour tout réel α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\mathrm{d}s$ est convergente.

(b) Montrer que $a_k = \displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ks)}{1+s^2}\mathrm{d}s$.

On pourra utiliser les changements de variables $s = x + 2n\pi$ et $r = 2n\pi - x$.

Partie C

Soit ϕ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xs)}{1+s^2}\mathrm{d}s$.

(1) Montrer que ϕ est continue et bornée sur $[0,+\infty[$ et calculer $\phi(0)$.

(2) (a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\phi(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que la fonction ϕ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a

$$\forall x > 0,\ \phi'(x) = \frac{1}{x}\phi(x) - 2x^2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

(c) Montrer alors que

$$\forall x > 0,\ \phi'(x) = \frac{1}{x}\phi(x) - \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\mathrm{d}s.$$

(3) Soit la fonction ψ définie sur $]0,+\infty[$ par $\psi(x) = -2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\mathrm{d}s$.

(a) Montrer que ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, à l'aide d'une intégration par parties, que l'on a

$$\forall x > 0,\ \psi'(x) = x\phi(x).$$

(b) En déduire que ϕ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifie l'équation différentielle :

$$\forall x > 0,\ \phi''(x) = \phi(x).$$

(4) Déterminer alors a_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(5) En déduire que, pour tout réel t, on a :

$$F(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2(1-2\mathrm{e}^{-1}\cos(t)+\mathrm{e}^{-2})}.$$

FIN DE L'EPREUVE