



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

4 heures

Calculatrices autorisées

# Mathématiques 1

PSI

2011

Le but de ce problème est d'établir *partie V* une identité relative à la fonction Gamma, due à Euler, puis d'en présenter *partie VI* une application à la distribution de Boltzmann dans un gaz de particules.

## I La fonction Gamma

On définit la fonction  $\Gamma$  d'Euler, pour tout réel  $x > 0$ , par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

**I.A** – Montrer que la fonction  $t \rightarrow e^{-t} t^{x-1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  si, et seulement si,  $x > 0$ .

**I.B** – Justifier que la fonction  $\Gamma$  est de classe  $C^1$  et strictement positive sur  $]0, +\infty[$ .

**I.C** – Exprimer  $\Gamma(x+1)$  en fonction de  $x$  et de  $\Gamma(x)$ .

**I.D** – Calculer  $\Gamma(n)$  pour tout entier naturel  $n$ ,  $n \geq 1$ .

## II Formule de Stirling

Pour tout entier  $k \geq 2$ , on pose :

$$u_k = \ln k - \int_{k-1}^k \ln t dt$$

**II.A** – À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$u_k = \frac{1}{2} (\ln k - \ln(k-1)) - \frac{1}{2} \int_{k-1}^k \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} dt$$

**II.B** – Pour tout entier  $k \geq 2$ , on note :

$$w_k = \frac{1}{2} \int_{k-1}^k \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} dt$$

Justifier la convergence de la série  $\sum_{k \geq 2} w_k$ .

En déduire qu'il existe un nombre réel  $a$  tel que :

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + a + v_n$$

où  $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$ .

**II.C** – En utilisant encore une intégration par parties, montrer que :

$$\left| w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \right| \leq \frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}$$

**II.D** – En déduire que

$$\left| v_n - \frac{1}{12n} \right| \leq \frac{1}{12n^2}$$

puis que :

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Dans la suite on admettra que  $a = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$  et on pourra utiliser la formule de Stirling :

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

### III L'identité d'Euler

Dans cette partie, nous allons établir l'identité d'Euler suivante :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad (\text{III.1})$$

On désigne par  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définies sur  $]0, +\infty[$  par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in ]0, n[ \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$$

et on définit pour tout réel  $x > 0$  les suites  $(I_n(x))_{n \geq 1}$  et  $(J_n(x))_{n \geq 0}$  par :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

$$J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt$$

**III.A** – Montrer que pour tout entier  $n, n \geq 1$ , la fonction  $f_n$  est continue et intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

**III.B** – Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$$

**III.C** – Montrer que, pour tout entier  $n, n \geq 0$ ,

$$\forall x > 0, \quad J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$$

**III.D** – En déduire que, pour tout  $x > 0$ ,

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)(x+n)}$$

**III.E** – Établir l'identité d'Euler (III.1).

### IV Une intégrale à paramètre

Dans toute la suite, on définit une fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto u - [u] - 1/2$$

où la notation  $[u]$  désigne la partie entière de  $u$ .

**IV.A** – Dessiner soigneusement le graphe de l'application  $h$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

**IV.B** – Montrer que la fonction  $H$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$H(x) = \int_0^x h(t) dt$$

est continue, de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et périodique de période 1.

**IV.C** – À l'aide d'une intégration par parties, justifier, pour  $x > 0$ , la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du$$

**IV.D** – L'application  $u \longmapsto \frac{h(u)}{u+x}$  est-elle intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  ?

**IV.E** – Soit  $\varphi$  l'application définie pour tout  $x > 0$  par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du$$

En reprenant l'intégration par parties de la question IV.C, démontrer que l'application  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et que pour tout  $x > 0$ ,

$$\varphi'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du$$

## V Une autre identité due à Euler

Nous allons maintenant établir une autre formule importante due à Euler, valable pour tout  $x > 0$  :

$$\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u} du$$

où  $h$  est l'application définie à la partie IV.

On fixe donc  $x > 0$  et pour tout entier naturel  $n$ , on définit  $F_n(x)$  par :

$$F_n(x) = \ln \left( \frac{n! n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)} \right)$$

**V.A** – Montrer que pour tout entier naturel  $i$  :

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln t dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x} du$$

**V.B** – En déduire que :

$$F_n(x) = G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x} du$$

où

$$G_n(x) = \ln n! + (x+1) \ln n - \left(x+n+\frac{3}{2}\right) \ln(x+n+1) + n+1 + \left(x+\frac{1}{2}\right) \ln x$$

**V.C** –

**V.C.1)** En utilisant la formule de Stirling, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi}$$

**V.C.2)** En déduire que :

$$\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du$$

**V.D** – Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif,

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln x + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du$$

## VI Distribution de Boltzmann

**VI.A** – Soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  quatre nombres réels strictement positifs deux à deux distincts et deux nombres réels strictement positifs  $E$  et  $N$ . Soit  $\Omega$  la partie, supposée non vide, formée des quadruplets  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  de  $\mathbb{R}_+^4$  vérifiant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = N \\ \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3 + \varepsilon_4 x_4 = E \end{cases}$$

**VI.A.1)** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^4$ .

Montrer que  $f$  admet un maximum sur  $\Omega$ .

On note alors  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Omega$  un point en lequel ce maximum est atteint.

**VI.A.2)** Montrer que si  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega$  alors  $x_3$  et  $x_4$  peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x_3 &= ux_1 + vx_2 + w \\ x_4 &= u'x_1 + v'x_2 + w' \end{aligned}$$

où l'on donnera explicitement  $u, v, u', v'$  en fonction de  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ .

**VI.A.3)** En supposant qu'aucun des nombres  $a_1, a_2, a_3, a_4$  n'est nul, déduire que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + u \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + u' \frac{\partial f}{\partial x_4}(a) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + v \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + v' \frac{\partial f}{\partial x_4}(a) &= 0 \end{aligned}$$

**VI.A.4)** Montrer que le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs  $(1, 0, u, u')$  et  $(0, 1, v, v')$  admet un sous-espace supplémentaire orthogonal engendré par les vecteurs  $(1, 1, 1, 1)$  et  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ .

**VI.A.5)** En déduire l'existence de deux réels  $\alpha, \beta$  tels que pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha + \beta \varepsilon_i$$

**VI.B** – On définit la fonction  $F$  pour tout  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  de  $\mathbb{R}_+^4$  par

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = - \sum_{i=1}^4 \ln \Gamma(1 + x_i)$$

On suppose qu'il existe  $\bar{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4) \in \Omega$ , les nombres  $N_1, N_2, N_3, N_4$  étant tous les quatre non nuls, tel que

$$\max_{x \in \Omega} F(x) = F(\bar{N})$$

Montrer l'existence de deux nombres réels  $\lambda$  et  $\mu$  vérifiant pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  :

$$\ln N_i + \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u + N_i)^2} du = \lambda + \mu \varepsilon_i$$

**VI.C** – Pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , on pose

$$\theta(N_i) = \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u + N_i)^2} du$$

**VI.C.1)** Montrer que pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$0 < \theta(N_i) < \frac{1}{N_i}$$

**VI.C.2)** Montrer l'existence d'un réel  $K$  strictement positif tel que pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$N_i = K e^{\mu \varepsilon_i} e^{-\theta(N_i)}$$

### Commentaire

Les calculs précédents interviennent dans la modélisation de gaz de particules :  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$  correspondent à quatre niveaux différents d'énergies et  $N_1, \dots, N_4$  aux nombres de particules qui se trouvent respectivement au niveau  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$  (pour un total de  $N$  particules et une énergie totale  $E$ ). Sous réserve d'équiprobabilité des répartitions, la probabilité d'être dans la configuration  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  est donnée par  $N! / (N_1! N_2! N_3! N_4!)$ .

En mécanique statistique, on pose comme principe que les particules vont se répartir de manière à ce que cette probabilité soit maximale. Cela revient à chercher la répartition qui maximise la somme  $-\sum_{i=1}^4 \ln(N_i!)$ , assujettie aux conditions de VI.A. Il découle alors du dernier résultat établi dans le problème, la loi de répartition de Boltzmann, à savoir que pour tous  $j, k, j \neq k$ , si  $N_j$  et  $N_k$  sont assez grands :  $N_j/N_k \simeq e^{\mu(\varepsilon_j - \varepsilon_k)}$ . D'autre part, un calcul utilisant conjointement la formule de Boltzmann donnant l'expression statistique de l'entropie  $S = -k_B \ln(N! / (N_1! \dots N_4!))$  et la relation  $dS = dE/T$  (pour une transformation à volume constant) permet d'établir que  $\mu = -1/k_B T$ .

---

• • • FIN • • •

---