ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2011

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)

L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Inégalité de Prékopa et Leindler.

Notations.

On notera $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. On désignera par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On notera $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ (resp. $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+^*)$) l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ (resp. dans $\mathbb{R}_+^*$).

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$. Pour tous réels a et b on notera $a\mathcal{A}+b\mathcal{B}$ la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$a\mathcal{A} + b\mathcal{B} = \{ax + by,\ x \in \mathcal{A},\ y \in \mathcal{B}\}\,.$$

En particulier pour $a = -1$, on écrit $-\mathcal{A} = \{-x,\ x \in \mathcal{A}\}$.

Si f désigne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée sur $\mathbb{R}$ alors on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si:

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)\,.$$

L'opposée d'une fonction convexe est une fonction concave.

On rappelle que si g est de classe C^1 sur I, alors g est convexe si et seulement sa dérivée g' est croissante (au sens large) sur I.

Pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}_+$, tous $x \in I$ et $\lambda \in]0,1[$, on écrira $f(x)^\lambda$ pour $(f(x))^\lambda$.

Partie I. Une inégalité de Prékopa et Leindler.

1) Soient λ un réel dans l'intervalle $]0,1[$, et a et b deux réels positifs. Montrer que

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geq a^\lambda b^{1-\lambda}\,,$$

(on pourra introduire une certaine fonction auxiliaire dont on justifiera la concavité). Montrer en outre que pour tout réel $u > 1$,

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^u \leq \lambda a^u + (1-\lambda)b^u\,.$$

2) Soient a et b deux réels positifs et λ un réel dans $]0,1[$. Montrer que

$$(a+b)^\lambda \leq a^\lambda + b^\lambda\,.$$

Dans toute cette partie λ est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et f, g, h sont des fonctions de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ intégrables qui satisfont l'inégalité suivante

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}\,.$$

Le but de cette partie est de montrer l'inégalité suivante, à laquelle on fera référence par "inégalité de Prékopa et Leindler", ou en abrégé "P-L":

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx\right)^{1-\lambda}\,.$$

Dans les questions 3), 4) et 5) on supposera de plus que f et g sont strictement positives, c'est-à-dire pour tout réel x, $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$.

3) On note $F = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ et $G = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$. Montrer que pour tout t dans l'intervalle $]0,1[$ il existe un unique réel noté $u(t)$ et un unique réel noté $v(t)$ tels que

$$\frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u(t)} f(x)dx = t, \quad \frac{1}{G}\int_{-\infty}^{v(t)} g(x)dx = t\,.$$

(On pourra étudier les variations de la fonction : $u \mapsto \frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u} f(x)dx$).

4) Montrer que les applications u et v sont de classe C^1 sur l'intervalle $]0,1[$ et, calculer pour chaque $t \in]0,1[$ les nombres dérivés $u'(t)$ et $v'(t)$.

5) Montrer que l'ensemble image de l'application w définie sur $]0,1[$ par

$$\forall t \in]0,1[, \quad w(t) = \lambda u(t) + (1-\lambda)v(t)\,,$$

est égal à $\mathbb{R}$. Puis prouver que w définit un changement de variable de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$. En utilisant ce dernier et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(w)dw$, montrer que f, g et h satisfont l'inégalité "P-L" (1).

On pose $\Psi(u) = \exp(-u^2)$ pour tout réel u.

A partir de maintenant, on suppose que les fonctions f, g et h sont seulement à valeurs positives ou nulles.

6) Prouver que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \Psi(x)^{\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda}\,.$$

Soit M un réel strictement positif. On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que f et g sont nulles en dehors de l'intervalle $[-M, M]$. On note $\Lambda = \min(\lambda, 1-\lambda)$, $\Theta = \max(\lambda, 1-\lambda)$ et, $\widehat{M} = M\max(\lambda, 1-\lambda)$. Pour chaque réel u on pose:

$$\Psi_M(u) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{\Theta^2}(|u| - \widehat{M})^2), & \text{si } |u| > \widehat{M} \\ 1, & \text{si } |u| \leq \widehat{M} \end{cases}$$

7) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Prouver que si $|y| \leq M$ alors $\Psi(x) \leq \Psi_M(z)$. De même, prouver que si $|x| \leq M$ alors $\Psi(y) \leq \Psi_M(z)$.

8) Soit $\epsilon \in]0,1[$, $f_\epsilon = f + \epsilon\Psi$ et $g_\epsilon = g + \epsilon\Psi$. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f_\epsilon(x)^{\lambda} g_\epsilon(y)^{1-\lambda} \leq h(z) + \epsilon^{\Lambda}(\|f\|_\infty^{\lambda} + \|g\|_\infty^{1-\lambda})\,(\Psi_M(z))^{\Lambda} + \epsilon\Psi(z),$$

où $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On commencera par appliquer l'inégalité de la question 2, puis les deux questions précédentes. On rappelle que $f(x) = 0$ si $|x| > M$ et que $g(y) = 0$ si $|y| > M$).

9) En déduire que si f et g sont nulles en dehors d'un intervalle borné alors l'inégalité "P-L" est satisfaite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction *continue* qui vaut 1 sur $[-n, n]$, qui vaut 0 sur $]-\infty, -n-1] \cup [n+1, +\infty[$ et qui est affine sur chacun des deux intervalles $[-n-1, -n]$ et $[n, n+1]$.

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda} \leq \chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y)\,.$$

11) Montrer que l'inégalité "P-L" (1) est satisfaite (si on choisit d'utiliser le théorème de convergence dominée alors on vérifiera soigneusement que ses conditions de validité sont remplies).

Partie II. Fonctions log-concaves.

Soit n un entier strictement positif. On dira qu'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ est log-concave si pour tout λ dans l'intervalle $]0, 1[$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}\,.$$

12) Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Prouver alors que l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \exp\left(-N(x)^2\right),$$

est continue et log-concave sur $\mathbb{R}^n$. (On pourra observer que la fonction $u \mapsto u^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$).

Partie III. Quelques applications géométriques.

Dans cette partie on admettra que l'inégalité "P-L" démontrée dans la partie I reste vraie dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ continues par morceaux et intégrables. C'est-à-dire que pour toutes fonctions f, g, h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, et pour tout λ dans l'intervalle $]0, 1[$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \ \ h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}\,,$$

l'inégalité suivante est vérifiée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx\right)^{1-\lambda}.$$

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *à support borné* si il existe un réel $M > 0$ tel que f est nulle en dehors du carré $[-M, M]^2$, c'est à dire que $f(x, y) = 0$ si $|x| > M$ ou $|y| > M$.

On admettra que

$$\int_{-M}^{M}\Big(\int_{-M}^{M} f(x, y)dy\Big)dx = \int_{-M}^{M}\Big(\int_{-M}^{M} f(x, y)dx\Big)dy\,,$$

et que cette valeur commune ne dépend pas du choix de M. On définit alors l'intégrale double $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy$ de $f(x, y)$ sur $\mathbb{R}^2$ comme la valeur commune des deux intégrales itérées écrites dans l'égalité précédente.

13) Soit $\lambda \in]0,1[$ et f, g, h des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ continues à support borné et telles que
$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \forall Y \in \mathbb{R}^2, \quad h(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geq f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda}\,.$$
Montrer que
$$\int\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)dxdy \geq \left(\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy\right)^\lambda \left(\int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy\right)^{1-\lambda}.$$

Dans la suite on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique.

14) Soit $\mathcal{A}$ une partie ouverte bornée non vide de $\mathbb{R}^2$. On désigne par $C(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions continues f de $\mathbb{R}^2$ dans $[0,1]$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A},\ f(x,y) = 0$ (en d'autres termes f est nulle hors de $\mathcal{A}$). Montrer alors que la borne supérieure
$$\sup_{f \in C(\mathcal{A})} \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$$
existe et définit un réel noté $V(\mathcal{A})$.

15) On considère un rectangle $]a,b[\times]c,d[$ du plan $\mathbb{R}^2$, avec $a < b$ et $c < d$. Calculer le réel $V(]a,b[\times]c,d[)$. Que représente-t-il? (On pourra utiliser des fonctions du type
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \phi(x)\varphi(y)\,,$$
où ϕ et φ sont des fonctions continues et affines par morceaux bien choisies).

16) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties ouvertes bornées non vides de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in]0,1[$. Vérifier que $\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Puis montrer que
$$V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}) \geq V(\mathcal{A})^\lambda V(\mathcal{B})^{1-\lambda}\,.$$
Pour démontrer cette inégalité, on utilisera le résultat *admis* suivant. Pour tout $f \in C(\mathcal{A})$ et $g \in C(\mathcal{B})$, la fonction h déterminée par:
$$\forall Z \in \mathbb{R}^2,\ h(Z) = \sup\{f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda} /\ X, Y \in \mathbb{R}^2,\ Z = \lambda X + (1-\lambda)Y\}$$
définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

17) Soit $u : \mathbb{R}^2 \to]0,+\infty[$ une fonction continue et log-concave au sens de la partie II. Prouver que l'inégalité précédente reste vraie si on remplace l'application V par l'application γ définie pour toute partie ouverte bornée (non vide) $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ par
$$\gamma(\mathcal{A}) = \sup_{f \in C(\mathcal{A})} \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)u(x,y)dxdy\,.$$

Fin du Problème.