e3a

10PSI11

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice I.— Dans cet exercice les deux parties sont indépendantes. Le candidat pourra aborder la partie B en admettant le résultat de la question A(3)(b)

Soit n un entier naturel non nul. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de dimension $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note respectivement I_n et O_n la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le déterminant d'une matrice A est noté $\det(A)$, sa trace $\mathrm{Tr}(A)$ et son polynôme caractéristique est désigné par $P_A(X)$.

Partie A

(1) Soient A, B, C et et D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Justifier brièvement les relations suivantes entre les déterminants de matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définies par blocs et les déterminants de leurs blocs :

$$\det(\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix}) = \det(D), \quad \det(\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}) = 1 \quad \text{et} \quad \det(\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix}) = \det(A).$$

(b) En déduire $\det(\begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D)$.

(c) De la question précédente, déduire $\det(\begin{pmatrix} A & O_n \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D)$.

(2) Dans toute la suite de cette partie, A, B, C et D sont quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $DC = CD$. Soit la matrice définie par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

A l'aide du produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$, montrer que, si la matrice D est inversible, alors on a

$$\det(M) = \det(AD - BC).$$

(3) Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $D_x = D - xI_n$ et $M_x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$ pour tout nombre complexe $x \notin S$ où S est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$.

(b) En déduire que l'on a $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ en toute généralité.

Partie B

Dans cette partie, q désigne un nombre complexe différent de 0 et de 1. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices 2×2 à coefficients complexes. On rappelle que la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est $\mathcal{B} = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ où

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit la matrice non nulle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On pose $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On définit les deux endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivants :

$$\mathcal{R}_A : \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ X \mapsto AX \end{array} \qquad \mathcal{L}_A : \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ X \mapsto XA \end{array}$$

(1) Déterminer les matrices de $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{L}_A$ dans la base $\mathcal{B}$.

(2) Montrer que la matrice de l'endomorphisme $\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice définie par blocs

$$M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q\,{}^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q\,{}^tA \end{pmatrix}.$$

(3) Montrer que l'on a successivement les égalités suivantes

(a) $\det(M_A) = \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2)$,

(b) $\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\det(\begin{pmatrix} d - qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a - qd \end{pmatrix})$,

(c) $\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\Big((1+q)^2\det(A) - q\left(\mathrm{Tr}(A)\right)^2\Big)$.

(4) On suppose à présent que le polynôme caractéristique de A se décompose en le produit $P_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que l'on a $\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$.

(b) A l'aide des questions précédentes, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
- Il existe une matrice non nulle B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $AB = qBA$.
- On a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.

(5) Soit A un matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle qu'il existe une matrice B non nulle dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avec $AB = qBA$ où $q \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Montrer que A est semblable à une matrice de l'un des trois types suivants

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & q\alpha \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{C}^*.$$

Exercice II .— Dans cet exercice, la partie C peut-être traitée indépendamment des parties A et B.

Partie A

Soit a un réel positif ou nul. On considère les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_0 = a, \quad b_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

(1) Montrez que pour tout entier $n > 0$ on a

(a) $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$,

(b) $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$.

(2) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$0 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n.$$

(3) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \leq a_n - b_n,$$

puis que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^n}|1 - a|.$$

(4) En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent vers la même limite.

Partie B

Désormais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent les suites de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ en posant

$$a_0(x) = x, \quad b_0(x) = 1, \quad a_{n+1}(x) = \frac{a_n(x) + b_n(x)}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1}(x) = \sqrt{a_n(x) b_n(x)}.$$

(1) Déduire de la partie A que les suites de fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f.

(2) (a) Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.

(b) Montrer qu'on a $\sqrt{x} \leq f(x) \leq x$ pour tout x positif.

(3) Soit A un réel strictement positif. Montrer que les suites de fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $[0, A]$ vers f. (On pourra utiliser la question A(3).

(4) En déduire que la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.

Partie C

(1) Soient α et β deux réels strictement positifs. Montrer que la fonction

$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+1)}}$.

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

(3) (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, la fonction S_x définie par $S_x(t) = \dfrac{1}{2}(t - \dfrac{x}{t})$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Soient α et β deux réels strictement positifs. En utilisant le changement de variable $s = S_{\alpha\beta}(t)$, démontrer que l'on a

$$\forall x > 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+(\frac{\alpha+\beta}{2})^2)(s^2+\alpha\beta)}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}.$$

(c) En déduire l'égalité

$$\forall x > 0 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+(\frac{\alpha+\beta}{2})^2)(t^2+\alpha\beta)}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}.$$

Partie D

(1) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+(a_n(x))^2)(t^2+(b_n(x))^2)}}.$$

(2) Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on définit la fonction

$$h_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t^2+(a_n(x))^2)(t^2+(b_n(x))^2)}}.$$

(a) Montrer que, pour $t > 0$ et $x > 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_n(t) = \frac{1}{t^2+(f(x))^2}$.

(b) Démontrer l'inégalité $0 < h_n(t) \leq \dfrac{1}{t^2+x}$ où $t > 0$, $x > 0$ et $n \geq 1$.

(c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t)dt = \frac{\pi}{2f(x)}$ où $x > 0$.

(d) En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \dfrac{\pi}{2f(x)}$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

FIN DE L'EPREUVE