



Mathématiques II

PC

2010

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures

Calculatrices autorisées

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III est pour une large part indépendante des deux autres.

I Systèmes de racines

Les systèmes de racines interviennent dans divers domaines des mathématiques et en cristallographie.

Le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On rappelle qu'une réflexion de E est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E . Pour tout élément α non nul de E , on note τ_α la réflexion de E par rapport à l'orthogonal de la droite $\text{Vect}(\alpha)$.

I.A – Soit α un élément non nul de E . Montrer, pour tout vecteur x de E , l'identité :

$$\tau_\alpha(x) = x - 2 \frac{\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$$

Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on appelle système de racines de F une partie non vide \mathcal{R} de F vérifiant les quatre propriétés suivantes :

- \mathcal{R} est fini, engendre F et ne contient pas le vecteur nul ;
- pour tout α dans \mathcal{R} , on a $\tau_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$;
- pour tout α dans \mathcal{R} , les seuls éléments de \mathcal{R} colinéaires à α sont α et $-\alpha$;
- pour tout couple (α, β) dans \mathcal{R}^2 , on a $2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$.

I.B – On suppose dans cette question que l'espace E est de dimension 1.

Montrer que les systèmes de racines de E sont les ensembles $\{\alpha, -\alpha\}$, avec $\alpha \in E \setminus \{0\}$.

I.C – Dans cette question, l'espace E est de dimension $n \geq 2$.

Pour tout couple (α, β) de vecteurs non nuls de E , soit $\theta_{\alpha, \beta}$ l'angle géométrique entre α et β , c'est-à-dire l'unique élément de $[0, \pi]$ donné par : $\|\alpha\| \cdot \|\beta\| \cos \theta_{\alpha, \beta} = \langle \alpha, \beta \rangle$.

I.C.1) Soit \mathcal{R} un système de racines de E et soient α, β deux éléments de \mathcal{R} non colinéaires.

a) Montrer, à l'aide de la propriété 4, que : $2 \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} |\cos \theta_{\alpha, \beta}| \cdot 2 \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} |\cos \theta_{\alpha, \beta}| \leq 3$.

b) On suppose $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$. Montrer que le couple (α, β) se trouve dans l'une des configurations recensées dans le tableau ci-dessous (chaque ligne correspondant à une configuration) :

| $\theta_{\alpha, \beta}$ | $\cos \theta_{\alpha, \beta}$ | $\frac{\ \beta\ }{\ \alpha\ }$ |
|--------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| $\pi/2$ | 0 | ≥ 1 |
| $\pi/3$ | 1/2 | 1 |
| $2\pi/3$ | -1/2 | 1 |
| $\pi/4$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}$ |
| $3\pi/4$ | $-\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}$ |
| $\pi/6$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}$ |
| $5\pi/6$ | $-\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}$ |

I.C.2) Réciproquement, on suppose qu'un couple (α, β) de vecteurs non colinéaires de E se trouve dans l'une des configurations recensées dans le tableau ci-dessus. Montrer que le réel $2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ est un entier relatif ; en préciser la valeur.

I.D – Dans cette question, l'espace E est de dimension $n = 2$.

Pour tout système de racines \mathcal{R} de E , on pose

$$\theta_{\mathcal{R}} = \min\{\theta_{\alpha, \beta} \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^2, \alpha \neq \beta \text{ et } \alpha \neq -\beta\}$$

I.D.1) Montrer que $\theta_{\mathcal{R}}$ est bien défini et est égal à $\pi/2, \pi/3, \pi/4$ ou $\pi/6$.

I.D.2) Pour chaque valeur de $k \in \{2, 3, 4, 6\}$, représenter graphiquement un système de racines \mathcal{R}_k tel que $\theta_{\mathcal{R}_k} = \pi/k$. Il n'est pas nécessaire de justifier que les figures tracées représentent bien des systèmes de racines. Quel est le cardinal de \mathcal{R}_k ? Aucune justification n'est attendue.

I.E – Dans cette question, l'espace E est de dimension $n = 3$.

Soient (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale de E et $\mathcal{R}_0 = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\}$.

I.E.1) Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par la partie \mathcal{R}_0 est un plan vectoriel.

I.E.2) Représenter graphiquement \mathcal{R}_0 dans le plan $\text{Vect}(\mathcal{R}_0)$. Reconnaitre l'un des systèmes de racines représentés à la question I.D.2.

II Propriétés de $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$

- La lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- On note \mathbb{K} le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.
- On note respectivement $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $GL(n, \mathbb{K})$, $\mathcal{D}(n, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} , le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ formé des matrices diagonales.
- On désigne par $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ de trace nulle.
- On note I_n la matrice identité et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.
- On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est *nilpotente* s'il existe un entier naturel non nul r tel que $A^r = 0$. De la même manière, on dit qu'un endomorphisme f est *nilpotent* s'il existe un entier naturel non nul r tel que $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_r = 0$.
- Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, le *crochet* $[A, B]$ est défini par $[A, B] = AB - BA$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, on définit l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \\ B &\longmapsto [A, B] \end{aligned}$$

- On dit qu'un triplet (X, H, Y) de trois matrices non nulles de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est un *triplet admissible* si les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$[H, X] = 2X \quad ; \quad [X, Y] = H \quad ; \quad [H, Y] = -2Y$$

On pose :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

II.A – Généralités

II.A.1) Montrer que $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel ; en préciser la dimension.

II.A.2) Justifier que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, la matrice $[A, B]$ appartient à $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$.

II.B – Un isomorphisme

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} j : \mathbb{K}^3 &\longrightarrow \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels.

II.C – Caractérisation des matrices nilpotentes

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- La matrice A est nilpotente ;
- Le spectre de A est égal à $\{0\}$;
- La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II.D – Le cas complexe

On suppose dans cette question que \mathbb{K} est égal à \mathbb{C} .

II.D.1) Montrer que deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{C})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

II.D.2) Ce résultat reste-t-il vrai pour deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{C})$, avec $n \geq 3$?

II.E – Le cas réel

On suppose dans cette question que \mathbb{K} est égal à \mathbb{R} .

II.E.1) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{R})$. On suppose que son polynôme caractéristique vaut $X^2 + r^2$, où r est un réel non nul.

a) Justifier l'existence d'une matrice $P \in GL(2, \mathbb{C})$ vérifiant : $irH_0 = P^{-1}AP$. Que vaut la matrice $A^2 + r^2I_2$?

b) Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à la matrice A , c'est-à-dire qui à un vecteur colonne u de \mathbb{R}^2 associe le vecteur Au . Soit w un vecteur non nul de \mathbb{R}^2 . Prouver que la famille $(\frac{1}{t}f(w), w)$ est une base de \mathbb{R}^2 , et donner la matrice de f dans cette base.

II.E.2) Montrer que deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

II.E.3) On munit l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 de sa structure affine euclidienne canonique et de son repère canonique. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{R})$, on note \mathcal{Q}_A l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 dont l'image par l'application j possède le même polynôme caractéristique que A .

a) Soit r un réel strictement positif. Montrer que chacune des parties \mathcal{Q}_{X_0} , \mathcal{Q}_{rJ_0} et \mathcal{Q}_{rH_0} est une quadrique dont on précisera une équation.

b) Représenter graphiquement l'allure des quadriques \mathcal{Q}_{X_0} , \mathcal{Q}_{J_0} et \mathcal{Q}_{H_0} sur un même dessin.

II.F – Un lemme

Soient A , B et M trois éléments de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$.

II.F.1) Exprimer la trace de la matrice M^2 en fonction du déterminant de M .

II.F.2) Démontrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si la trace de la matrice M^2 est nulle.

II.F.3) On suppose que les matrices A et $[A, B]$ commutent.

Démontrer que la matrice $[A, B]$ est nilpotente.

II.G – Description des triplets admissibles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$

II.G.1) Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}(2, \mathbb{K})$ qui commutent avec X_0 . Quelles sont les matrices M de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ qui commutent avec X_0 ?

II.G.2) Soit P une matrice de $GL(2, \mathbb{K})$. Vérifier que $(PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$ est un triplet admissible. On se propose de démontrer que, réciproquement, tous les triplets admissibles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ sont de cette forme. Pour toute la suite de la question II.G, soient X, H, Y trois éléments de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ tels que (X, H, Y) forme un triplet admissible.

II.G.3) Montrer en utilisant les questions II.F et II.C qu'il existe une matrice $Q \in GL(2, \mathbb{K})$ vérifiant $X = QX_0Q^{-1}$.

On fixe pour la suite de la question II.G une telle matrice $Q \in GL(2, \mathbb{K})$.

II.G.4) On définit les vecteurs $u = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) En calculant le vecteur $[H, X]u$ de deux manières différentes, démontrer que u est un vecteur propre de la matrice H .

b) En calculant le vecteur $[H, X]v$ de deux manières différentes, prouver l'existence d'un scalaire t vérifiant l'identité : $H = Q \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

c) Trouver une matrice $T \in GL(2, \mathbb{K})$ commutant avec X_0 et vérifiant la relation $H = QTH_0(QT)^{-1}$.

On pose désormais $P = QT$.

II.G.5) Soit $Y' \in \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ telle que (X, H, Y') soit un triplet admissible.

a) Dédire de la question II.G.1 les matrices de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ qui commutent avec X .

b) Calculer les matrices $\Phi_X(Y - Y')$ et $\Phi_H(Y - Y')$.

c) En déduire que l'on a $Y' = Y$.

II.G.6) Démontrer l'identité $(X, H, Y) = (PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$.

III Systèmes de racines et triplets admissibles d'un sous-espace de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$

III.A – Diagonalisation simultanée

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

III.A.1) Soient f un endomorphisme de V diagonalisable et W un sous-espace non nul de V stable par f . Montrer que l'endomorphisme de W induit par f est diagonalisable.

III.A.2) Soient f et g deux endomorphismes de V qui commutent, c'est-à-dire tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g .

III.A.3) Soit I un ensemble non vide et soit $\{f_i \mid i \in I\}$ une famille d'endomorphismes de V diagonalisables commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base de V dans laquelle les matrices des endomorphismes f_i , pour $i \in I$, sont diagonales. *Indication : on pourra traiter d'abord le cas où tous les endomorphismes f_i sont des homothéties, puis raisonner par récurrence sur la dimension de V .*

III.B – Application

On reprend dans cette partie les notations de la partie II.

Soit \mathcal{A} un sous-espace vectoriel non nul de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ stable par crochet, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}, [A, B] \in \mathcal{A}$$

On note \mathcal{E} l'intersection de \mathcal{A} et $\mathcal{D}(n, \mathbb{K})$.

III.B.1) Soit H un élément de \mathcal{E} .

a) Calculer l'image par Φ_H de la base canonique de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. En déduire que Φ_H est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.

b) Montrer qu'il existe une base de \mathcal{A} dans laquelle les matrices des endomorphismes de \mathcal{A} induits par les Φ_H , pour $H \in \mathcal{E}$, sont diagonales.

Pour toute application λ de \mathcal{E} dans \mathbb{K} , on pose :

$$\mathcal{A}_\lambda = \{M \in \mathcal{A} \mid \Phi_H(M) = \lambda(H)M \text{ pour tout } H \in \mathcal{E}\}$$

III.B.2) Soit λ une application de \mathcal{E} dans \mathbb{K} .

a) Montrer que \mathcal{A}_λ est un sous-espace vectoriel de \mathcal{A} .

b) Montrer que si \mathcal{A}_λ est non réduit à $\{0\}$, alors λ est une forme linéaire de \mathcal{E} .

On note \mathcal{E}^* l'espace vectoriel des formes linéaires de \mathcal{E} et $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ l'ensemble des éléments λ de $\mathcal{E}^* \setminus \{0\}$ tels que \mathcal{A}_λ est différent de $\{0\}$.

III.C – Un exemple

On reprend dans cette question les notations des parties I et II ainsi que de la question III.B. On suppose désormais

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \mid (A, B, C) \in (\mathcal{M}(2, \mathbb{R}))^3, B = {}^tB \text{ et } C = {}^tC \right\}$$

où, pour tout $M \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$, le symbole tM désigne la transposée de M .

On a donc $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \mid D \in \mathcal{D}(2, \mathbb{R}) \right\}$.

III.C.1) Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ stable par crochet. Montrer qu'on a $\mathcal{A}_0 = \mathcal{E}$, où \mathcal{A}_0 désigne \mathcal{A}_λ lorsque λ est la forme linéaire nulle. Donner une base de \mathcal{A}_0 .

III.C.2) Pour $k \in \{1, 2\}$, on note e_k l'élément de \mathcal{E}^* qui à toute matrice $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}$,

où $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(2, \mathbb{R})$, associe le coefficient d_k .

a) Vérifier que (e_1, e_2) forme une base de \mathcal{E}^* .

On munit \mathcal{E}^* de l'unique produit scalaire faisant de (e_1, e_2) une base orthonormale.

b) Soit $\mathcal{R} = \{e_1 - e_2, e_2 - e_1, e_1 + e_2, -e_1 - e_2, 2e_1, -2e_1, 2e_2, -2e_2\}$. Montrer que l'ensemble \mathcal{R} est un système de racines de \mathcal{E}^* . On pourra pour cela dessiner la partie \mathcal{R} dans le plan euclidien \mathcal{E}^* et reconnaître l'un des systèmes de racines rencontrés dans la question I.D

III.C.3) Soit $\alpha \in \mathcal{R}$. Déterminer par le calcul le sous-espace vectoriel \mathcal{A}_α . Vérifier que \mathcal{A}_α est une droite vectorielle.

III.C.4) Établir la relation $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathcal{A}_\alpha$.

III.C.5) Démontrer l'égalité $\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \mathcal{R}$.

III.C.6) On pose désormais $\alpha = e_1 - e_2$, $\beta = 2e_2$, $H_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) En utilisant les résultats de la question III.C.3, montrer qu'il existe un couple $(X_\alpha, X_{-\alpha}) \in \mathcal{A}_\alpha \times \mathcal{A}_{-\alpha}$ et un couple $(X_\beta, X_{-\beta}) \in \mathcal{A}_\beta \times \mathcal{A}_{-\beta}$ tels que $(X_\alpha, H_\alpha, X_{-\alpha})$ et $(X_\beta, H_\beta, X_{-\beta})$ soient des triplets admissibles de \mathcal{A} .

On fixe deux tels triplets admissibles.

b) Montrer que \mathcal{A} est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ stable par crochet et contenant les matrices $X_\alpha, H_\alpha, X_{-\alpha}, X_\beta, H_\beta$ et $X_{-\beta}$.

• • • FIN • • •