**Les calculatrices sont interdites**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

## PARTIE I

On note $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des nombres entiers strictement négatifs.
On considère la série de fonctions d'une variable réelle de terme général $u_n$ défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -n, \quad u_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

**I.1.** Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathcal{D}$.

On notera désormais $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série de fonctions, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre $n$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste correspondant. On a donc $R_n = U - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**I.2.**

**I.2.1.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n^{(p)}$ la dérivée de $u_n$ à l'ordre $p$.
Calculer $u_n^{(p)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -n$.

**I.2.2.** Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $-1 < a < b$.
Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

**I.2.3.** Déduire de ce qui précède que $U$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

**I.3.**

**I.3.1.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $U(x)$ à l'aide de $U_N(x)$ et $U(x+N)$.

**I.3.2.** En déduire que $U$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-N-1, -N[$, puis sur $\mathcal{D}$.

**I.3.3.** Soit $p \in \mathbb{N}$ donné, $p \geq 2$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, établir une expression de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$ à l'aide de $p$ et de $U^{(p-2)}(x)$.

**I.4.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Donner un équivalent de $U(x)$ lorsque $x$ tend vers $-N$.

**I.5.**

**I.5.1.** Montrer que $U$ est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$.

**I.5.2.** Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\displaystyle\int_{x+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq U(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.
En déduire un équivalent de $U(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**I.6.** Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $U(x) = \dfrac{1}{4}\left[U\left(\dfrac{x}{2}\right) + U\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\right]$.

## PARTIE II

**II.1.** Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on note $f_p$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad f_p(t) = \frac{t^{p+1}}{e^t - 1}.$$

**II.1.1.** Déterminer $\lim\limits_{t \to 0} f_p(t)$ selon les valeurs de $p$.
On notera désormais $f_p$ la fonction $f_p$ prolongée par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier.

**II.1.2.** Déterminer un équivalent de $f_p(t)$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

**II.2.** Soit $\varphi$ la fonction d'une variable réelle $x$ définie par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} f_0(t) e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} dt.$$

**II.2.1.** Montrer que le domaine de définition de $\varphi$ est $]-1, +\infty[$.

**II.2.2.** Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a \in ]-1, +\infty[$ donnés.
Vérifier que pour tout $x \geq a$ et tout $t \geq 0$ on a $0 \leq f_p(t)e^{-xt} \leq f_p(t)e^{-at}$.
Montrer que la fonction $t \mapsto f_p(t)e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

**II.2.3.** Déduire de ce qui précède que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

**II.2.4.** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

**II.3.**

**II.3.1.** Montrer que $\varphi(x) - \varphi(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ pour tout $x > -1$.

**II.3.2.** En déduire que $\varphi(x) = U(x)$ pour tout $x > -1$.

**II.3.3.** Soit $p \in \mathbb{N}$ donné, $p \geq 2$.
Pour tout $x > -1$, exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$ à l'aide de $p$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}e^{-xt}}{e^t - 1} dt$.

## PARTIE III

Soit $g$ la fonction d'une variable réelle $x$, périodique de période $2\pi$, telle que :

$$\forall x \in [-\pi, +\pi[, \qquad g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|.$$

Soit $\displaystyle\frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(g)\cos nx + b_n(g)\sin nx)$ la somme de la série de Fourier de $g$.

**III.1.** Préciser pourquoi $g$ est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

**III.2.**

**III.2.1.** Calculer $b_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**III.2.2.** Calculer $a_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**III.3.**

**III.3.1.** Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

**III.3.2.** En déduire la valeur de $U\left(-\frac{1}{2}\right)$, puis celle de $U(0)$.

**III.4.** Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

**III.5.** On note $G$ la primitive de $g$ telle que $G(0) = 0$.

**III.5.1.** Montrer que $G$ est impaire, périodique de période $2\pi$.

**III.5.2.** Calculer les coefficients de Fourier de $G$.
Préciser pourquoi $G$ est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

**III.5.3.** Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

**Fin de l'énoncé**