

SESSION 2010

MPM2006



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

---

**MATHEMATIQUES 2**

Durée : 4 heures

*Les calculatrices sont autorisées.*

\* \* \*

*NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\* \* \*

## QUELQUES UTILISATIONS DES PROJECTEURS

### Notations et objectifs :

Dans tout le texte  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . On note  $\text{id}$  l'endomorphisme identité de  $E$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille  $n$ .

Si  $E_1$  et  $E_2$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  supplémentaires, c'est-à-dire  $E = E_1 \oplus E_2$ , on appelle projecteur sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  l'endomorphisme  $p$  de  $E$  qui, à un vecteur  $x$  de  $E$  se décomposant comme  $x = x_1 + x_2$ , avec  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ , associe le vecteur  $x_1$ .

On rappelle que si  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la matrice exponentielle de  $A$  est la matrice :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

De même si  $u$  est un endomorphisme de  $E$ , l'exponentielle de  $u$  est l'endomorphisme :

$$\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

Dans les parties II. et III., on propose une méthode de calcul d'exponentielle de matrice à l'aide de projecteurs spectraux dans les cas diagonalisable et non diagonalisable. Dans la dernière partie IV., on utilise les projections orthogonales pour calculer des distances à des parties.

Les quatre parties sont indépendantes.

### I. Questions préliminaires

1. Soit les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $\exp(A)$ ,  $\exp(B)$ ,  $\exp(A)\exp(B)$  et  $\exp(A+B)$  (pour  $\exp(A+B)$ , on donnera la réponse en utilisant les fonctions ch et sh).

2. Rappeler sans démonstration, une condition suffisante pour que deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifient l'égalité  $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$ .

### II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r,$$

où  $r$  désigne un entier vérifiant  $1 \leq r \leq n$ .

3. *Polynôme interpolateur de Lagrange* : on note  $\mathbb{R}_{r-1}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $r-1$ .

On considère l'application linéaire  $\phi$  de  $\mathbb{R}_{r-1}[X]$  dans  $\mathbb{R}^r$  définie par :

$$P \mapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_r)).$$

Déterminer le noyau de  $\phi$ , puis en déduire qu'il existe un unique polynôme  $L$  de  $\mathbb{R}_{r-1}[X]$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$ .

4. Pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on définit le polynôme  $l_i$  de  $\mathbb{R}_{r-1}[X]$  par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}.$$

- (a) Calculer  $l_i(\lambda_j)$  selon les valeurs de  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, r\}$ .
- (b) En déduire une expression du polynôme  $L$  comme une combinaison linéaire des polynômes  $l_i$  avec  $i \in \{1, \dots, r\}$ .
5. *Une propriété de l'exponentielle* : soit  $P$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $D$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (a) Justifier que l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par  $M \mapsto PMP^{-1}$  est une application continue.
- (b) En déduire que :

$$\exp(PDP^{-1}) = P \exp(D) P^{-1}.$$

6. Dédurre des questions 3. et 5. que  $\exp(A) = L(A)$ .
7. On suppose que  $E$  est munie d'une base  $\mathcal{B}$  et on désigne par  $v$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice par rapport à  $\mathcal{B}$  est  $A$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $v$ , et  $x$  un vecteur propre associé. Démontrer que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on a :

$$P(v)(x) = P(\lambda)x.$$

8. Soit  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on note  $E_i = \text{Ker}(v - \lambda_i \text{id})$  le sous-espace propre de  $v$  associé à  $\lambda_i$ .
- (a) Démontrer que l'endomorphisme de  $E$ ,  $p_i = l_i(v)$  est le projecteur sur  $E_i$ , parallèlement à  $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r E_k$  (on dit que les  $p_i$  sont les projecteurs spectraux de  $v$ ).
- (b) En déduire une expression de  $\exp(A)$  comme une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

### III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas non diagonalisable

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  dont le polynôme minimal est  $(X - 1)^2(X - 2)$ .

9. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable? Justifier la réponse.
10. Écrire, sans justifier, un exemple de matrice triangulaire de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  dont l'endomorphisme canoniquement associé a pour polynôme minimal  $(X - 1)^2(X - 2)$ .
11. Démontrer, sans aucun calcul, que  $E = \text{Ker}(u - \text{id})^2 \oplus \text{Ker}(u - 2 \text{id})$ .
12. On considère les endomorphismes de  $E : p = (u - \text{id})^2$  et  $q = u \circ (2 \text{id} - u)$ . Calculer  $p + q$ .
13. Démontrer que l'endomorphisme  $p$  est le projecteur sur  $\text{Ker}(u - 2 \text{id})$ , parallèlement à  $\text{Ker}(u - \text{id})^2$ . Que dire de l'endomorphisme  $q$ ?
14. Soit  $x$  un élément de  $E$ .
- (a) Préciser  $(u - 2 \text{id})(p(x))$ .
- (b) Déterminer un nombre réel  $\alpha$  tel que pour tout entier naturel  $k$ ,  $u^k \circ p = \alpha^k p$ .
- (c) En déduire que  $\exp(u) \circ p = \beta p$  où  $\beta$  est un réel à déterminer.
15. Que vaut pour tout entier  $k \geq 2$ ,  $(u - \text{id})^k \circ q$ ?
- Démontrer que  $\exp(u) \circ q = \gamma u \circ q$  où  $\gamma$  est un réel à déterminer (on pourra écrire en justifiant que  $\exp(u) = \exp(\text{id}) \circ \exp(u - \text{id})$ ).
16. Écrire enfin l'endomorphisme  $\exp(u)$  comme un polynôme en  $u$ .

### IV. Calcul de distances à l'aide de projecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on suppose en plus que l'espace  $E$  est muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , ce qui lui confère une structure d'espace euclidien. On rappelle que la norme euclidienne associée, notée  $\| \cdot \|$ , est définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on note  $F^\perp$  son orthogonal, et on appelle projecteur orthogonal sur  $F$ , noté  $p_F$  le projecteur sur  $F$ , parallèlement à  $F^\perp$ .

Enfin, si  $x$  est un vecteur de  $E$ , la distance euclidienne de  $x$  à  $F$ , notée  $d(x, F)$  est le réel :

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}.$$

17. *Théorème de la projection orthogonale* : soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $x$  un vecteur de  $E$ . Rappeler sans démonstration, la formule permettant de calculer  $d(x, F)$  à l'aide du vecteur  $p_F(x)$ .
18. *Cas des hyperplans* : soit  $n$  un vecteur non nul de  $E$  et  $H$  l'hyperplan de  $E$  orthogonal à  $n$ , c'est à dire  $H = (\text{Vect}\{n\})^\perp$ . Exprimer pour  $x \in E$ , la distance  $d(x, H)$  en fonction de  $\langle x, n \rangle$  et de  $\|n\|$ .
19. *Une application* : dans cette question uniquement,  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni de son produit scalaire canonique : si  $A$  et  $B$  sont dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , en notant  $\text{Tr}$  la trace,

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB).$$

Enfin on note  $H$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont la trace est nulle.

- (a) Justifier que  $H$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et déterminer  $H^\perp$ .
- (b) Si  $M$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , déterminer la distance  $d(M, H)$ .
20. *Et pour une norme non euclidienne ?* Dans cette question  $E = \mathbb{R}^2$  est muni de la norme infinie notée  $N_\infty$  : si  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $N_\infty(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ . On pose  $F = \text{Vect}\{(1, 0)\}$  et  $x = (1, 1)$ . Déterminer la distance «infinie» du vecteur  $x$  à  $F$ , c'est-à-dire le réel :

$$d_\infty(x, F) = \inf\{N_\infty(x - y) \mid y \in F\},$$

et préciser l'ensemble des vecteurs  $m$  pour lesquels cette distance est atteinte, c'est-à-dire  $d_\infty(x, F) = N_\infty(x - m)$ . Commenter.

**Fin de l'énoncé**