ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2009

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Aspects déterministes de l'étude des matrices aléatoires

Rappels

On rappelle la formule de Stirling qui donne un équivalent de $n!$ quand n tend vers l'infini
$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}.$$
On rappelle aussi que le déterminant d'une matrice M de coefficient $(m_{i,j}\,;\, 1 \leqslant i, j \leqslant n)$ peut s'exprimer comme

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \ldots m_{n,\sigma(n)},$$

où $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des permutations de $\{1, \cdots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

I Polynômes d'Hermite

Pour tout entier naturel k, on définit la fonction h_k par

$$\begin{aligned} h_k \,:\, \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \frac{(-1)^k}{2^k} e^{x^2}\, \mathrm{D}^k(e^{-x^2}), \end{aligned}$$

où $\mathrm{D}^k(e^{-x^2})$ désigne la dérivée k-ième de la fonction $g(t) = e^{-t^2}$ prise au point $t = x$. (Par convention $D^0(e^{-x^2}) = e^{-x^2}$.)

1) Calculer h_0 et h_1 et établir pour tout entier n, pour tout réel x, l'identité suivante :

$$2h_{n+1}(x) - 2xh_n(x) + h_n'(x) = 0. \tag{1}$$

2) En déduire que h_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1.

On admet que pour tous les entiers m et n,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_m(x) h_n(x) e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} \sqrt{\pi}\, n!\, 2^{-n} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases} \tag{2}$$

On notera dorénavant
$$d_n = \sqrt{\pi}\, n!\, 2^{-n}.$$

3) Montrer que pour tout réel x, l'identité suivante est satisfaite :
$$\left.\frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2}\right|_{t=0} = 2^n\, e^{-x^2} h_n(x).$$

4) Montrer que pour tout réel x, la fonction f_x de la variable réelle t définie par
$$f_x(t) = e^{-(x-t)^2},$$
admet le développement en série entière suivant, dont on précisera le rayon de convergence,
$$f_x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\, 2^k\, h_k(x)\, e^{-x^2}.$$

On considère la fonction w définie par
$$\begin{aligned} w\ :\ \mathbf{R} \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x,\, t) &\longmapsto e^{2xt-t^2}. \end{aligned}$$

Il est évident (et admis dans la suite) que w satisfait la propriété suivante : pour tout réel x et tout réel t,
$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) - (2x-2t)w(x,t) = 0. \tag{3}$$

5) Établir pour tout réel x et tout entier positif n, l'équation de récurrence suivante :
$$2h_{n+1}(x) - 2xh_n(x) + nh_{n-1}(x) = 0, \tag{4}$$
avec la convention $h_{-1}(x) = 0$.

6) Montrer que pour tout entier n, l'identité $h_n' = nh_{n-1}$ est satisfaite.

On pose maintenant pour tout entier k et pour tout réel x,
$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{d_k}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, h_k(x).$$

Les égalités (2) impliquent que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(x)^2 \,\mathrm{d}x = 1 \text{ et que } \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(x)\phi_n(x) \,\mathrm{d}x = 0, \text{ si } m \neq n. \tag{5}$$

7) Calculer $\phi_n(0)$ et $\phi_n'(0)$ pour tout entier n.

8) Pour tout entier k, tout réel x et tout réel y, exprimer

$$(x-y)h_k(x)h_k(y)$$

uniquement en fonction de $h_{k+1}(x)$, $h_{k+1}(y)$, $h_k(x)$, $h_k(y)$, $h_{k-1}(x)$ et $h_{k-1}(y)$.

9) Établir, pour des réels x et y distincts, les identités suivantes :

$$\begin{aligned} (x-y)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{d_k}h_k(x)h_k(y) &= \frac{1}{d_{n-1}}\left(h_n(x)h_{n-1}(y) - h_n(y)h_{n-1}(x)\right), \\ \sum_{k=0}^{n-1}\phi_k(x)\phi_k(y) &= \sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{\phi_n(x)\phi_{n-1}(y) - \phi_{n-1}(x)\phi_n(y)}{x-y}. \end{aligned} \tag{6}$$

II Étude de ϕ_{2m}

Dans toute cette partie, m est un entier naturel fixé. Soient β et γ deux réels non nuls et r une fonction continue sur $\mathbf{R}$, on considère l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho''(x) + \gamma^2\rho(x) &=& r(x), \quad \text{pour tout réel } x, \\ \\ \rho(0) &=& \beta, \\ \rho'(0) &=& 0. \end{array} \right. \tag{$S(r,\beta,\gamma)$}$$

10) Montrer que l'équation différentielle $(S(r,\beta,\gamma))$ a une solution unique dont on donnera l'expression.

Avec les résultats de la première partie, on peut montrer (et on l'admet dorénavant) que pour tout m, ϕ_{2m} est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho''(x) + (4m+1)\rho(x) & = & x^2\rho(x), \quad \text{pour tout réel } x, \\ \\ \rho(0) & = & \phi_{2m}(0), \\ \rho'(0) & = & \phi'_{2m}(0). \end{array}\right. \tag{S}$$

11) Montrer que pour tout réel x,

$$\phi_{2m}(x) = \alpha_{2m}\cos(\sqrt{4m+1}\,x) + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{4m+1}(x-y))}{\sqrt{4m+1}}\ y^2\phi_{2m}(y)\ \mathrm{d}y,$$

avec pour tout entier m :

$$\alpha_{2m} = \frac{(-1)^m}{\pi^{\frac{1}{4}}}\frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!}.$$

12) Trouver un équivalent de α_{2m} quand m tend vers l'infini.

13) Montrer que pour tout réel x, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left|\int_0^x \frac{\sin(\sqrt{4m+1}(x-y))}{\sqrt{4m+1}}\ y^2\phi_{2m}(y)\ \mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{4m+1}}\ \frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}}.$$

On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les relations (5)*.*

14) Établir pour tout réel $x > 0$, la limite suivante :

$$\lim_{m\to+\infty}(-1)^m\sqrt{\pi}\,m^{\frac{1}{4}}\ \phi_{2m}\left(\frac{x}{2\sqrt{m}}\right) = \cos(x).$$

III Intégrales de déterminants

Pour tout entier N, on note $K^{(N)}$ la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ donnée par

$$K^{(N)}(x,y) = \sum_{k=0}^{N-1}\phi_k(x)\phi_k(y),$$

pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

15) Montrer, pour tout x et y dans $\mathbf{R}$, les identités suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^{(N)}(x,z)K^{(N)}(z,y)\ \mathrm{d}z = K^{(N)}(x,y),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^{(N)}(x,x)\ \mathrm{d}x = N.$$

Soit k un entier tel que $k \geqslant 2$, et σ une permutation de l'ensemble $\{1,\dots k\}$. Pour deux entiers i et j de $\{1,\dots k\}$, on note $(i,\ j)$ la transposition qui échange i et j. On fait la convention : $(i,\ j)$ est égale à l'identité de $\mathfrak{S}_k$ si $i = j$.

On pose

$$\widehat{\sigma} = (k,\ \sigma(k)) \circ \sigma.$$

16) Montrer que $\widehat{\sigma}$ définit une permutation de $\{1,\dots,k\}$ telle que $\widehat{\sigma}(k) = k$. Calculer sa signature en fonction de celle de σ. (On distinguera le cas où $\sigma(k) = k$ du cas où $\sigma(k) \neq k$.)

On note $\widetilde{\sigma}$ la restriction de $\widehat{\sigma}$ à $\{1,\cdots,k-1\}$. On considère l'application θ définie par :

$$\begin{aligned} \theta\ :\ \mathfrak{S}_k &\longrightarrow \mathfrak{S}_{k-1} \\ \sigma &\longmapsto \widetilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on rappelle que

$$\theta^{-1}\Big(\{\theta(\sigma)\}\Big) = \{\tau \in \mathfrak{S}_k \,/\, \theta(\tau) = \theta(\sigma)\}.$$

17) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, établir les propriétés suivantes :

$$\mathrm{cardinal}\Big(\theta^{-1}(\{\theta(\sigma)\})\Big) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k) = k, \\ k-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

18) Montrer pour tout $(x_1,\cdots,x_k) \in \mathbf{R}^k$, pour tout entier N, les identités suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{k} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)})\ \mathrm{d}x_k = \begin{cases} N \displaystyle\prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\widetilde{\sigma}(i)}) & \text{si } \sigma(k) = k, \\ \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\widetilde{\sigma}(i)}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si L est une fonction de $\mathbf{R}^2$ à valeur dans $\mathbf{R}$, on note pour tout $(x_1, \cdots, x_k)$ dans $\mathbf{R}^k$,

$$\operatorname{Det} L(x_1, \cdots, x_k) = \det \begin{pmatrix} L(x_1,x_1) & L(x_1,x_2) & \dots & L(x_1,x_k) \\ L(x_2,x_1) & L(x_2,x_2) & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ L(x_k,x_1) & \dots & \dots & L(x_k,x_k) \end{pmatrix}.$$

On notera que si L est continue sur $\mathbf{R}^2$ alors $\operatorname{Det} L$ est continue sur $\mathbf{R}^k$.

19) En utilisant l'expression du déterminant rappelée dans les préliminaires, déduire, des questions précédentes, que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Det} K^{(N)}(x_1, \cdots, x_k)\ \mathrm{d}x_k = (N-k+1) \operatorname{Det} K^{(N)}(x_1, \cdots, x_{k-1}),$$

avec par convention $\operatorname{Det} K^{(N)}(x_1, \cdots, x_k) = 1$ si $k = 0$.

IV Déterminants et intégrales

Pour tout entier $N \geqslant 1$, on note $\Psi^{(N)}$ la fonction de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\Psi^{(N)}(x_1, \ldots, x_N) = e^{-\sum_{i=1}^N x_i^2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} (x_i - x_j)^2.$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant N$, on note $\Psi_k^{(N)}$ la fonction de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{R}$ définie par récurrence par

$$\Psi_N^{(N)} = \Psi^{(N)},$$

et pour $k < N$

$$\Psi_k^{(N)}(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{N-k} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k+1}^{(N)}(x_1, \ldots, x_k, y)\ \mathrm{d}y.$$

20) Soient N réels, $x_1, \cdots, x_N$, montrer les deux égalités suivantes :

$$\det \begin{pmatrix} h_0(x_1) & h_1(x_1) & \cdots & h_{N-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_0(x_N) & h_1(x_N) & \cdots & h_{N-1}(x_N) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} (x_i - x_j).$$

21) Soient N réels $(x_1, \cdots, x_N)$, établir pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant N$, l'identité suivante :

$$\frac{1}{d_0 \cdots d_{N-1}} \Psi_k^{(N)}(x_1, \ldots, x_k) = \operatorname{Det} K^{(N)}(x_1, \cdots, x_k).$$

On commencera par le cas $k = N$.

Fin du problème

On déduit de tout ce qui précède, que pour tout entier $k > 0$ et tout $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbf{R}^k$,

$$\lim_{N \to +\infty} (2N)^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{d_0 \cdots d_{N-1}} \Psi_k^{(N)}\left(\frac{x_1}{\sqrt{2N}}, \ldots, \frac{x_k}{\sqrt{2N}}\right) = \det S(x_1, \cdots, x_k),$$

où

$$\begin{aligned} S : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{\sin(x-y)}{\pi(x-y)} \text{ si } x \neq y \\ (x, x) &\longmapsto \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Sans le savoir, vous venez de démontrer que si l'on choisit une matrice hermitienne de taille N, « au hasard », la probabilité que k de ses valeurs propres soit dans un voisinage de $(x_1, \ldots, x_k)$ est proportionnelle à $\det S(x_1, \cdots, x_k)$ pour N grand. Ces considérations sont particulièrement d'actualité pour l'étude des systèmes radio à plusieurs antennes utilisés dans les « box ».