e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1

On considère une matrice carrée A d'ordre 4 à coefficients réels. On suppose que le rang de A est égal à 3, que la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1, que -1 est valeur propre double de A.

1° Prouver que 0 est valeur propre de A.

2° Prouver que 1 est valeur propre de A.

3° Déterminer le polynôme caractéristique noté $P_A(X)$ de la matrice A.

4° Pour k entier naturel , $k \geq 4$, déterminer le reste, noté $R_k(X)$, de la division euclidienne de X^k par $P_A(X)$.

5° Pour k entier naturel , $k \geq 4$, démontrer que A^k est combinaison linéaire de A , A^2 , A^3 et déterminer cette combinaison linéaire.

Exercice 2

Soit α et β deux réels, avec $\alpha < \beta$. Soit a et b deux applications de $[\alpha,\beta]$ vers $\mathbf{R}$, continues sur $[\alpha,\beta]$. On note (E) l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

Dans cet exercice on appelle solution de (E) toute application de $[\alpha,\beta]$ vers $\mathbf{R}$ de classe C^2 vérifiant (E) sur $[\alpha,\beta]$.

Soit f une solution de (E) sur $[\alpha,\beta]$. On suppose que f admet une infinité de zéros dans $[\alpha,\beta]$. Le but de l'exercice est d'établir que f est l'application nulle sur $[\alpha,\beta]$.

Pour cela on considère une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de zéros de f, deux à deux distincts, appartenant à $[\alpha,\beta]$.

1° Dans cette question on suppose que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel x.

a) Prouver que x appartient à $[\alpha,\beta]$. En déduire que $f(x) = 0$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe au moins un zéro de f', noté y_n, strictement compris entre x_n et x_{n+1}.

c) Calculer $f'(x)$.

d) Conclure.

2° Prouver que f est aussi l'application nulle sur $[\alpha,\beta]$ lorsque la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente.
3° Prouver à l'aide d'un contre-exemple que le résultat établi dans cet exercice est faux si l'on remplace $[\alpha,\beta]$ par **R**.

Exercice 3

R est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.
Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel. Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières.
Soit $(\alpha_n)_n$ une suite réelle.

On rappelle que la relation $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$.

Partie A : Règle de Raabe-Duhamel.
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall\, n \geq n_0\,,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1° Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

2° Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.
3° On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge.
On choisit β tel que : $\lambda > \beta > 1$.

a) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

b) Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq N$, on ait : $u_n \leq K\, v_n$.

c) Prouver que la série $\sum u_n$ converge.

4° On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

5° Pour $n \geq 2$, on pose : $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la Règle de Raabe-Duhamel.

Partie B Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la Règle de Raabe-Duhamel.

1° Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

2° Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^n}$.

a) Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.

b) Etablir que : $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.

c) En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

3° Soit α un réel donné, n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose :

$$a_0 = 1 \ , \ \text{pour } n \geq 1, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!} \text{ et pour } x \text{ réel, } S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

a) Indiquer (sans démonstration) le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et, pour x élément de $]-R,R[$, la valeur de $S(x)$.

b) Utiliser la Règle de Raabe -Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

c) Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R,R]$ et établir que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$.

d) Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.

e) On suppose que : $-1 < \alpha < 0$.

i) Prouver que : $\lim_{n \to +\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.

ii) Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

iii) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 4

E est un espace euclidien de dimension n, $n \geq 1$. Le produit scalaire sur E est noté $\langle \ | \ \rangle$.
$(x_k)_{1 \leq k \leq p}$ et $(y_k)_{1 \leq k \leq p}$ sont deux familles de vecteurs de E telles que :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,....,p\}^2, \ \langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle .$$

Le but de cet exercice est d'établir la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :
Il existe un automorphisme orthogonal f de E vérifiant :

$$\forall k \in \{1,2,....,p\}, \ f(x_k) = y_k .$$

1° Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)$ un élément de $\mathbf{R}^p$. Prouver que $\left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i \right\|$.

En déduire que si $x_1, x_2, ..., x_p$ sont linéairement indépendants dans E alors $y_1, y_2, ..., y_p$ sont aussi linéairement indépendants dans E.

2° Dans cette question, on suppose que $x_1, x_2, ..., x_p$ sont linéairement indépendants dans E et que $p = n$. Etablir la propriété $(\mathcal{P})$.

3° Dans cette question, on suppose que $x_1, x_2, ..., x_p$ sont linéairement indépendants dans E et que $p \neq n$. On note F le sous espace vectoriel de E engendré par la famille $(x_k)_{1 \leq k \leq p}$ et G le sous espace vectoriel de E engendré par la famille $(y_k)_{1 \leq k \leq p}$. $F^{\perp}$ désigne le sous-espace de E orthogonal à F, $G^{\perp}$ désigne le sous-espace de E orthogonal à G.

a) Justifier l'inégalité $p < n$; préciser les dimensions des sous espaces vectoriels F, $F^{\perp}$, G, $G^{\perp}$.

b) Donner une condition sur l'entier naturel q pour assurer l'existence d'une famille orthonormale $(x_k)_{p+1 \leq k \leq q}$ de vecteurs de $F^{\perp}$ et d'une famille orthonormale $(y_k)_{p+1 \leq k \leq q}$ de vecteurs de $G^{\perp}$.

Pour tout (i, j) élément de $\{1, 2, ..., q\}^2$, comparer $\langle x_i | x_j \rangle$ et $\langle y_i | y_j \rangle$.

c) Etablir la propriété $(\mathcal{P})$.

4° Dans cette question, on suppose que $x_1, x_2, ..., x_p$ sont linéairement dépendants dans E. Etablir la propriété $(\mathcal{P})$.