

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,  
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,  
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,  
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,  
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2009

### ÉPREUVE D'INFORMATIQUE

Filière MP

Durée de l'épreuve : 3 heures.

L'usage de calculatrices est autorisé. L'utilisation d'un ordinateur est interdite.

Sujet mis à disposition des concours : ENSAE ParisTech, TELECOM SudParis (ex INT), TPE-EIVP

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :*

*INFORMATIQUE - MP*

*L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages.*

#### Recommandations aux candidats

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures même s'il n'a pas été démontré.
- Il ne faut pas hésiter à formuler les commentaires qui semblent pertinents même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement.

#### Composition de l'épreuve

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants :

- un problème sur les automates, pages 2 et 3 ;
- un problème d'algorithmique, pages 4 à 8.

#### Préliminaire pour l'ensemble de l'épreuve concernant la programmation

Il faudra écrire des fonctions ou des procédures à l'aide d'un langage de programmation qui pourra être soit **Caml**, soit **Pascal**, tout autre langage étant exclu. **Indiquer en début d'épreuve le langage de programmation choisi ; il est interdit de modifier ce choix au cours de l'épreuve.** Certaines questions des problèmes sont formulées différemment selon le langage de programmation ; cela est indiqué chaque fois que cela est nécessaire. Lorsque le candidat écrira une fonction ou une procédure, il pourra faire appel à une autre fonction ou procédure définie dans les questions précédentes. Enfin, si les paramètres d'une fonction ou d'une procédure à écrire sont supposés vérifier certaines hypothèses, il ne sera pas utile dans l'écriture de cette fonction ou de cette procédure de tester si les hypothèses sont bien vérifiées.

Dans les énoncés des problèmes, un même identificateur écrit dans deux polices de caractères différentes désignera la même entité mais du point de vue mathématique pour une police (en italique ; par exemple *a*) et du point de vue informatique pour l'autre (en romain ; par exemple `a`).

## Problème 1. Automates

Les quelques rappels de définitions qui suivent permettent de fixer la terminologie et les notations.

Un **alphabet**  $\Sigma$  est un ensemble fini d'éléments appelés **lettres**. Un **mot** sur  $\Sigma$  est une suite finie de lettres de  $\Sigma$ ; la **longueur** d'un mot est le nombre de lettres le composant; le mot de longueur nulle est noté  $\varepsilon$ . On désigne par  $\Sigma^*$  l'ensemble des mots sur  $\Sigma$ , y compris le mot  $\varepsilon$ . Un **langage sur**  $\Sigma$  est une partie de  $\Sigma^*$ .

Un *automate fini*  $A$  est décrit par une structure  $\langle \Sigma, Q, T, I, F \rangle$ , où :

- $\Sigma$  est un alphabet;
- $Q$  est un ensemble fini et non vide appelé *ensemble des états* de  $A$ ;
- $T \subseteq Q \times \Sigma \times Q$  est appelé l'*ensemble des transitions*; étant donnée une transition  $(p, x, q) \in T$ , on dit qu'elle est d'*origine*  $p$ , d'*extrémité*  $q$  et qu'elle est d'*étiquette*  $x$ ; on pourra la noter  $p \xrightarrow{x} q$ ;
- $I \subseteq Q$  est appelé *ensemble des états initiaux* de  $A$ ;
- $F \subseteq Q$  est appelé *ensemble des états finals* de  $A$ .

Dans ce problème, on considérera uniquement des automates ayant un seul état initial, noté  $q_0$ .

Un *chemin* de  $A$  est une suite de transitions de la forme  $p_0 \xrightarrow{x_1} p_1 \xrightarrow{x_2} p_2 \dots \xrightarrow{x_k} p_k$ . On dit alors que ce chemin va de  $p_0$  à  $p_k$ . Dans un automate fini, un état  $q$  est dit *utile* s'il existe à la fois un chemin de l'état initial  $q_0$  à  $q$  et un chemin de  $q$  à un état final.

On rappelle le théorème de Kleene : un langage sur un alphabet  $\Sigma$  est rationnel si et seulement s'il existe un automate fini d'alphabet  $\Sigma$  qui le reconnaît.

**On ne considère dans tout ce problème que l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ . Tous les mots et langages considérés seront définis sur cet alphabet.**

On définit une application  $\phi$  de  $\Sigma^*$  dans  $\Sigma^*$  de la façon suivante :

- $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$ ;
- si un mot  $u$  de longueur  $2k > 0$  s'écrit  $u = u_1u_2 \dots u_{2k-1}u_{2k}$  où, pour  $i \in \{1, 2, \dots, 2k\}$ ,  $u_i$  appartient à  $\Sigma$ , alors  $\phi(u) = u_2u_1u_4u_3 \dots u_{2k}u_{2k-1}$ ;
- si un mot  $u$  de longueur  $2k + 1 > 0$  s'écrit  $u = u_1u_2 \dots u_{2k}u_{2k+1}$  où, pour  $i \in \{1, 2, \dots, 2k, 2k + 1\}$ ,  $u_i$  appartient à  $\Sigma$ , alors  $\phi(u) = u_2u_1u_4u_3 \dots u_{2k}u_{2k-1}u_{2k+1}$ .

La fonction  $\phi$  agit donc en échangeant chaque lettre d'indice pair avec la lettre (d'indice impair) qui la précède immédiatement. Ainsi,  $\phi(a) = a$ ,  $\phi(abba) = baab$ ,  $\phi(aabab) = aaabb$ .

□ 1 – Soit  $u$  un mot dans  $\Sigma^*$ . Établir une condition nécessaire et suffisante pour que, quel que soit le mot  $v$  dans  $\Sigma^*$ , l'égalité  $\phi(uv) = \phi(u)\phi(v)$  soit vérifiée.

On note  $L_1$  l'ensemble des mots  $u$  tels que  $\phi(u) \neq u$ .

□ 2 – Caractériser les mots de  $L_1$ .

□ 3 – Proposer, preuve à l'appui, une expression rationnelle décrivant  $L_1$ ; on privilégiera une expression rationnelle simple.

□ 4 – Dessiner un automate fini reconnaissant  $L_1$ ; on privilégiera un automate ayant peu d'états.

On note  $L_2$  le langage décrit par l'expression rationnelle  $a^*b^*$ .

□ 5 – Proposer une expression rationnelle décrivant  $\phi(L_2)$ . Justifier brièvement la réponse.

□ 6 – Dessiner un automate fini reconnaissant  $\phi(L_2)$ . Justifier brièvement la réponse.

On se propose de montrer que si  $L$  est un langage rationnel, alors  $\phi(L)$  est aussi un langage rationnel. Les questions □ 7 à □ 14 permettent d'obtenir ce résultat.

Si  $L$  est un langage, on note  $P(L)$  l'ensemble des mots de  $L$  de longueur paire et  $I(L)$  l'ensemble des mots de  $L$  de longueur impaire.

□ 7 – Montrer que si  $L$  est rationnel,  $P(L)$  et  $I(L)$  sont rationnels.

□ 8 – On considère un automate fini  $A$  reconnaissant un langage  $L$  ne contenant que des mots de longueur paire ; soit  $q$  un état utile de  $A$ . Montrer que  $A$  ne possède pas de transition dont l'origine et l'extrémité soient  $q$ .

□ 9 – On considère un automate fini  $A = \langle \Sigma, Q, T, \{q_0\}, F \rangle$  reconnaissant un langage  $L$  ne contenant que des mots de longueur paire ; soit  $q$  un état utile de  $A$ . Montrer que les chemins de  $q_0$  à  $q$  soit tous de longueur paire, soit tous de longueur impaire.

Soit  $A$  un automate fini. Soit  $q$  un état de  $A$ . On suppose que :

- $q$  est un état utile ;
- $q$  n'est ni l'état initial, ni un état final ;
- il n'existe dans  $A$  aucune transition dont l'origine et l'extrémité soient simultanément  $q$ , c'est-à-dire aucune transition qui s'écrive  $q \xrightarrow{x} q$  quelle que soit l'étiquette  $x$  considérée ;
- il existe au moins deux transitions d'origine  $q$  ou au moins deux transitions d'extrémité  $q$ .

On considère l'automate obtenu à partir de  $A$  et  $q$  de la façon suivante : pour chaque quadruplet  $(q', q'', x, y)$ , où  $q'$  et  $q''$  sont deux états de  $A$ ,  $x$  et  $y$  deux lettres de  $\Sigma$  distinctes ou non, et tel que  $A$  contienne les transitions  $q' \xrightarrow{x} q$  et  $q \xrightarrow{y} q''$ , on ajoute un nouvel état  $r$  et les transitions  $q' \xrightarrow{x} r$  et  $r \xrightarrow{y} q''$  ; on ajoute donc autant d'états que de tels quadruplets ; chaque état ajouté est extrémité d'une unique transition et origine d'une unique transition. Enfin, on supprime l'état  $q$  et toutes les transitions d'origine ou d'extrémité  $q$ . On note  $S(A, q)$  l'automate ainsi obtenu.

□ 10 – Soit  $q$  un état vérifiant les hypothèses ci-dessus. Montrer que les automates  $A$  et  $S(A, q)$  reconnaissent le même langage.

□ 11 – Montrer que, si  $L$  est un langage rationnel, alors  $\phi(P(L))$  est aussi un langage rationnel.

Soit  $L$  un langage rationnel. Soit  $x$  une lettre de  $\Sigma$ . On note  $M(L, x)$  le langage défini comme suit : pour tout mot  $u$  sur l'alphabet  $\Sigma$ , le mot  $u$  appartient à  $M(L, x)$  si et seulement si le mot  $ux$  est dans  $L$ .

□ 12 – Montrer que si  $L$  est un langage rationnel et  $x$  appartient à  $\Sigma$ , le langage  $M(L, x)$  est rationnel.

□ 13 – Soit  $L$  un langage. Donner une relation entre  $\phi(I(L))$ ,  $\phi(M(I(L), a))$  et  $\phi(M(I(L), b))$ .

□ 14 – Soit  $L$  un langage rationnel. Montrer que  $\phi(L)$  est aussi un langage rationnel.

□ 15 – Soit  $L$  un langage non rationnel. Indiquer si  $\phi(L)$  peut être un langage rationnel.

□ 16 – Il s'agit d'écrire la fonction  $\phi$  en langage de programmation.

**Caml :**

On utilise le type suivant pour représenter les lettres de l'alphabet  $\Sigma$  :

```
type lettre = a | b ;;
```

Un mot est codé par une liste de type `lettre list` ; par exemple, le mot *abbab* est codé par la liste `[a;b;b;a;b]`. La liste vide `[]` code le mot de longueur nulle  $\epsilon$ .

Écrire en Caml une fonction `phi` telle que, si un mot  $u$  sur l'alphabet  $\Sigma$  est codé par une liste `u` de type `lettre list`, alors `phi u` renvoie une liste de type `lettre list` codant  $\phi(u)$ .

Attention : l'emploi de références ou de vecteurs est interdit.

**Pascal :**

On définit la constante et les types suivants :

```
const MAX = 100;
```

```
type Sigma = (a, b);
```

```
type Mot = array[1 .. MAX] of Sigma;
```

Écrire en Pascal une fonction `phi` telle que, si `u` de type `Mot` code un mot  $u$  sur l'alphabet  $\Sigma$  de longueur  $k$  inférieure ou égale à  $MAX$ , alors `phi (u, k)` renvoie un tableau de type `Mot` codant  $\phi(u)$ .

## Problème 2. Algorithmique

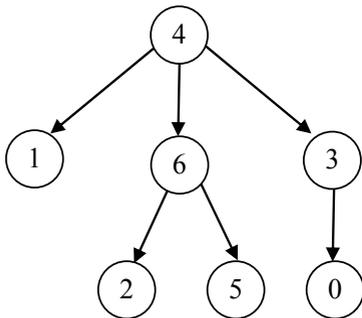
L'objectif de ce problème est de compter le nombre d'arbres *enracinés, non ordonnés* et *étiquetés* de nombre de nœuds donné. Pour cela, on étudie un codage particulier de ces arbres appelé *codage de Prüfer*.

Un arbre possède un nombre fini d'éléments appelés *nœuds*. Les arbres considérés dans ce problème possèdent tous au moins un nœud. Un *arbre enraciné non ordonné*  $A$  est défini récursivement de la façon suivante : il est constitué d'un nœud particulier appelé *racine* de  $A$  et d'un ensemble fini **non ordonné**, éventuellement vide, d'*arbres enracinés non ordonnés* appelés *sous-arbres* de  $A$ . Les racines des sous-arbres de  $A$  sont les *filles* de la racine de  $A$  et la racine de  $A$  est le *père* de ces derniers. Dans un arbre, deux nœuds sont dits *frères* s'ils ont même père. L'*arité* d'un nœud est son nombre de fils ; dans ce problème, l'arité d'un nœud peut être quelconque. Les nœuds d'arité 0 sont les *feuilles* de l'arbre.

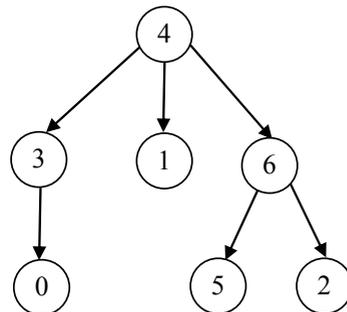
Un arbre est dit *étiqueté* si à chaque nœud est associé un entier positif ou nul, ces entiers étant deux à deux distincts ; l'entier associé à un nœud est l'*étiquette* du nœud. On pourra nommer un nœud par son étiquette ; si  $i$  est un entier, on pourra donc parler du nœud  $i$  pour le nœud d'étiquette  $i$ .

**Dans ce problème, le terme d'arbre désignera toujours un arbre enraciné non ordonné étiqueté.**

Les deux dessins ci-dessous sont deux représentations graphiques d'un **même** arbre nommé  $A_1$ . L'étiquette de la racine de  $A_1$  est 4 ; l'ensemble des étiquettes des fils de la racine est  $\{1, 3, 6\}$  ; l'ensemble des étiquettes des fils du nœud d'étiquette 6 est  $\{2, 5\}$  ; le nœud d'étiquette 3 possède un seul fils : le nœud d'étiquette 0 ; les nœuds d'étiquettes 0, 1, 2, 5 n'ont pas de fils. Les représentations graphiques d'un arbre donné diffèrent par l'ordre dans lequel on dessine les fils d'un même nœud.

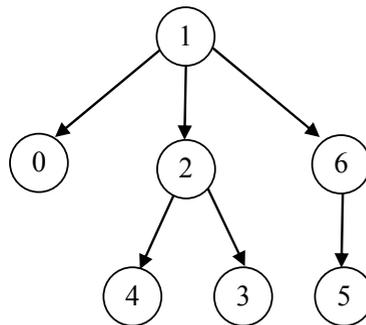


L'arbre  $A_1$ , première représentation



L'arbre  $A_1$ , seconde représentation

L'arbre  $A_2$  représenté ci-contre est différent de l'arbre  $A_1$ .



L'arbre  $A_2$

On dira qu'un arbre est un *arbre étiqueté consécutivement* s'il s'agit d'un arbre étiqueté et que l'ensemble de ses étiquettes forme un intervalle d'entiers de plus petite valeur 0 ; autrement dit, pour un arbre ayant  $n$  nœuds et étiqueté consécutivement, l'ensemble des étiquettes est  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Les arbres  $A_1$  et  $A_2$  sont des arbres étiquetés consécutivement.

## Première partie : d'un codage racine-fils-frères d'un arbre au codage de Prüfer

□ 17 – Donner la liste des arbres possédant trois nœuds et étiquetés consécutivement.

Soit  $A$  un arbre étiqueté consécutivement ayant  $n$  nœuds. Pour coder  $A$ , on définit un codage nommé *codage racine-fils-frères*. Pour cela, on fixe une représentation graphique de  $A$  ; on code  $A$  à l'aide de :

- l'étiquette de la racine (qui ne dépend pas de la représentation) ;
- un tableau nommé  *fils*  ; pour  $i$  compris entre 0 et  $n - 1$ , la case d'indice  $i$  du tableau  *fils*  contient la valeur  $-1$  si le nœud  $i$  est une feuille de l'arbre et, sinon, l'étiquette du fils du nœud  $i$  se situant le plus à gauche dans la représentation graphique choisie ;
- un tableau nommé  *freres*  ; pour  $i$  compris entre 0 et  $n - 1$ , la case d'indice  $i$  du tableau  *freres*  contient la valeur  $-1$  si le nœud  $i$  n'a aucun frère sur sa droite et, sinon, l'étiquette de son frère qui se trouve le premier sur sa droite.

Pour l'arbre  $A_1$ , si on choisit la première représentation, on obtient le codage suivant :

- la racine est le nœud 4 ;
- pour le tableau  *fils*  : les cases d'indices 0, 1, 2 et 5 contiennent la valeur  $-1$ , la case d'indice 3 contient 0, la case d'indice 4 contient 1, la case d'indice 6 contient 2 ;
- pour le tableau  *freres*  : les cases d'indices 0, 3, 4 et 5 contiennent la valeur  $-1$ , la case d'indice 1 contient 6, la case d'indice 2 contient 5, la case d'indice 6 contient 3.

Ainsi, l'arbre  $A_1$  est représenté par la valeur 4 pour la racine et par les deux tableaux ci-dessous :

indice	0	1	2	3	4	5	6
<i> fils </i>	-1	-1	-1	0	1	-1	2

indice	0	1	2	3	4	5	6
<i> freres </i>	-1	6	5	-1	-1	-1	3

On définit aussi deux tableaux qui peuvent être calculés à partir du codage racine-fils-frères :

- un tableau nommé  *peres*  ; pour  $i$  compris entre 0 et  $n - 1$ , la case d'indice  $i$  contient la valeur  $-1$  s'il s'agit de la racine de l'arbre et, dans les autres cas, l'étiquette du père du nœud  $i$  ; pour l'arbre  $A_1$ , la case d'indice 4 contient la valeur  $-1$ , la case d'indice 0 contient 3, les cases d'indices 1, 3 et 6 contiennent 4, les cases d'indices 2 et 5 contiennent la valeur 6 ;
- un tableau nommé  *arites*  ; pour  $i$  compris entre 0 et  $n - 1$ , la case d'indice  $i$  de ce tableau contient l'arité du nœud  $i$  ; pour l'arbre  $A_1$ , les cases d'indices 0, 1, 2 et 5 contiennent la valeur 0, la case d'indice 3 contient 1, la case d'indice 4 contient 3, la case d'indice 6 contient 2.

Pour l'arbre  $A_1$ , les tableaux  *peres*  et  *arites*  sont représentés ci-dessous :

indice	0	1	2	3	4	5	6
<i> peres </i>	3	4	6	4	-1	6	4

indice	0	1	2	3	4	5	6
<i> arites </i>	0	0	0	1	3	0	2

### Indications pour la programmation en Pascal

On définit la constante et le type suivant :

```
const MAX = 100;
```

```
type Tableau = array[0 .. MAX - 1] of Integer;
```

La constante MAX est un majorant du nombre de nœuds des arbres considérés.

### Fin des indications pour la programmation en Pascal

□ 18 – Il s'agit d'écrire en langage de programmation une fonction nommée  *calculer\_peres*  qui, à partir du codage racine-fils-frères d'un arbre étiqueté consécutivement, calcule le tableau  *peres*  correspondant à cet arbre.

**CamL** : Écrire en CamL une fonction  *calculer\_peres*  telle que, si on considère un arbre  $A$  possédant  $n$  nœuds et étiqueté consécutivement et si :

- *racine*  est un entier qui contient l'étiquette de la racine de  $A$ ,
- *fils*  et  *freres*  sont deux vecteurs de longueur  $n$  qui représentent respectivement les tableaux  *fils*  et  *freres*  d'un codage racine-fils-frères de  $A$ ,

alors `calculer_peres` `racine` `fil` `freres` renvoie un vecteur de longueur  $n$  correspondant au tableau `peres` défini plus haut.

**Pascal** : Écrire en Pascal une fonction `calculer_peres` telle que, si on considère un arbre  $A$  étiqueté consécutivement et si :

- `racine` est un entier qui contient l'étiquette de la racine de  $A$ ,
  - `fil` et `freres` sont de type `Tableau` et représentent respectivement les tableaux `fil` et `freres` d'un codage racine-fils-frères de  $A$ ,
  - `n` est un entier qui contient le nombre de nœuds de  $A$ ,
- alors `calculer_peres`(`racine`, `fil`, `freres`, `n`) renvoie un tableau de type `Tableau` contenant, entre les indices 0 et  $n - 1$ , le tableau `peres` défini plus haut.

□ 19 – Indiquer, en fonction du nombre de nœuds de l'arbre considéré, la complexité de la fonction `calculer_peres`.

□ 20 – Il s'agit d'écrire en langage de programmation une fonction nommée `calculer_arites` qui, à partir du codage racine-fils-frères d'un arbre étiqueté consécutivement, renvoie le tableau `arites` correspondant à cet arbre.

**Caml** : Écrire en Caml une fonction `calculer_arites` telle que, pour un arbre  $A$  possédant  $n$  nœuds et étiqueté consécutivement, si `fil` et `freres` sont deux vecteurs de longueur  $n$  qui représentent respectivement les tableaux `fil` et `freres` d'un codage racine-fils-frères de  $A$ , alors `calculer_arites` `fil` `freres` renvoie un vecteur correspondant au tableau `arites` défini plus haut.

**Pascal** : Écrire en Pascal une fonction `calculer_arites` telle que, pour un arbre  $A$  étiqueté consécutivement, si :

- `fil` et `freres` sont de type `Tableau` et représentent respectivement les tableaux `fil` et `freres` d'un codage racine-fils-frères de  $A$ ,
  - `n` est un entier qui contient le nombre de nœuds de  $A$ ,
- alors `calculer_arites`(`fil`, `freres`, `n`) renvoie un tableau de type `Tableau` contenant entre les indices 0 et  $n - 1$  les arités des nœuds de l'arbre.

□ 21 – Indiquer, en fonction du nombre de nœuds de l'arbre considéré, la complexité de la fonction `calculer_arites`.

□ 22 – Il s'agit d'écrire en langage de programmation une fonction `insérer` qui prend en arguments un tableau `table` d'entiers non nécessairement distincts triés par valeurs décroissantes et un entier  $d$  ; cette fonction modifie le tableau `table` pour insérer l'entier  $d$  en respectant l'ordre décroissant. L'entier  $d$  est inséré même s'il figure déjà dans `table`.

**Caml** : Écrire en Caml une fonction `insérer` telle que, si :

- `table` est un vecteur d'entiers,
  - `nb` est un entier positif ou nul ne dépassant pas la dimension du vecteur `table` diminuée de 1,
  - `d` est un entier,
- on suppose que le vecteur `table` contient des entiers classés par valeurs décroissantes dans les cases d'indices compris entre 0 et  $nb - 1$ , les autres cases du vecteur `table` étant ignorées, alors `insérer` `table` `nb` `d` insère la donnée  $d$  dans le vecteur `table` en respectant l'ordre décroissant. La fonction renvoie  $nb + 1$ , c'est-à-dire le nouveau nombre de données figurant dans `table`.

**Pascal** : Écrire en Pascal une fonction `insérer` telle que, si :

- `table` est de type `Tableau`,
  - `nb` est un entier positif ou nul ne dépassant pas `MAX - 1`,
  - `d` est un entier ;
- on suppose que le tableau `table` contient entre les indices 0 et  $nb - 1$  des entiers classés par valeurs décroissantes, les autres cases du tableau `table` étant ignorées,

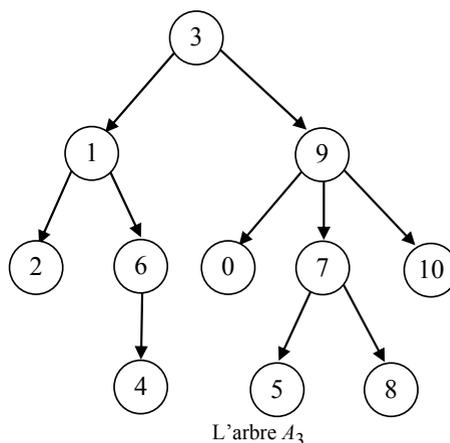
alors `insérer(table, nb, d)` insère la donnée `d` dans le tableau `table` en respectant l'ordre décroissant. La fonction renvoie `nb + 1`, c'est-à-dire le nouveau nombre de données figurant dans `table`.

□ 23 – Indiquer, en fonction du nombre  $nb$  d'entiers contenus dans un tableau trié `table`, la complexité de la fonction `insérer` quand elle insère un nouvel entier dans `table`.

Soit  $A$  un arbre possédant  $n$  nœuds ; on note  $E(A)$  l'ensemble des étiquettes de  $A$  ; les étiquettes de  $A$  étant toutes distinctes, l'ensemble  $E(A)$  possède  $n$  éléments. Le codage de Prüfer d'un arbre étiqueté ayant  $n$  nœuds est une suite de  $n - 1$  entiers appartenant à  $E(A)$ , suite notée  $Pr(A)$  ; ce codage est défini récursivement de la façon suivante. Si  $A$  est réduit à un nœud, sa racine, son codage de Prüfer est la suite vide. Sinon, soit  $f$  la feuille de  $A$  d'étiquette minimum et soit  $p$  le père de  $f$  ; on note  $A'$  l'arbre obtenu en enlevant de  $A$  la feuille  $f$  ; par définition, le codage de Prüfer de  $A$  est la suite dont le premier élément est l'étiquette de  $p$ , ce premier élément étant suivi du codage de Prüfer de  $A'$ .

Ainsi, le codage de Prüfer de l'arbre  $A_1$  est : 3, 4, 6, 4, 6, 4 ; le codage de Prüfer de l'arbre  $A_2$  est : 1, 2, 2, 1, 6, 1.

□ 24 – Indiquer le codage de Prüfer de l'arbre  $A_3$  ci-contre.



□ 25 – On considère un arbre  $A$  étiqueté consécutivement. Il s'agit d'écrire en langage de programmation une fonction qui calcule le codage de Prüfer de  $A$ . La fonction commencera par calculer les tableaux `peres` et `arites` ; puis elle construira un tableau contenant les feuilles de l'arbre initial classées par étiquettes décroissantes ; après cette partie préparatoire, la fonction calculera le codage de Prüfer.

**Caml** : Écrire en Caml une fonction `calculer_Prufer` telle que, si on considère un arbre  $A$  étiqueté consécutivement et si :

- `racine` est un entier qui contient l'étiquette de la racine de  $A$ ,
  - `fils` et  `freres` sont deux vecteurs de longueur  $n$  qui représentent respectivement les tableaux  `fils` et  `freres` d'un codage racine-fils-frères de  $A$ ,
- alors `calculer_Prufer racine fils freres` renvoie un vecteur de longueur  $n - 1$  contenant le codage de Prüfer de l'arbre  $A$ .

**Pascal** : Écrire en Pascal une fonction `calculer_Prufer` telle que, si on considère un arbre  $A$  étiqueté consécutivement et si :

- `racine` est un entier qui contient l'étiquette de la racine de  $A$ ,
  - `fils` et  `freres` sont de type `Tableau` et représentent respectivement les tableaux  `fils` et  `freres` d'un codage racine-fils-frères de  $A$ ,
  - `n` est un entier qui contient le nombre de nœuds de  $A$ ,
- alors `calculer_Prufer(racine, fils, freres, n)` renvoie un tableau, de type `Tableau`, contenant le codage de Prüfer de l'arbre  $A$  entre les indices 0 et  $n - 2$ .

□ 26 – Indiquer la complexité du calcul du codage de Prüfer d'un arbre  $A$  possédant  $n$  nœuds, étiqueté consécutivement et codé avec le codage racine-fils-frères.

## Seconde partie : d'un codage de Prüfer d'un arbre à un codage racine-fils-frères

□ 27 – On suppose qu'on connaît le codage de Prüfer d'un arbre  $A$  étiqueté consécutivement. Il s'agit d'écrire une fonction `calculer_arites_par_Prufer` qui calcule les arités des nœuds de l'arbre  $A$  à partir de ce codage.

**Caml** : Écrire en Caml une fonction `calculer_arites_par_Prufer` telle que, pour un arbre  $A$  possédant  $n$  nœuds et étiqueté consécutivement, si `Prufer` est un vecteur de longueur  $n - 1$  contenant le codage de Prüfer de  $A$ , alors `calculer_arites_par_Prufer Prufer` renvoie un vecteur de longueur  $n$  contenant les arités des nœuds de  $A$ .

Avant d'écrire la fonction `calculer_arites_par_Prufer`, on en donnera rapidement le principe.

**Pascal** : Écrire en Pascal une fonction `calculer_arites_par_Prufer` telle que, pour un arbre  $A$  étiqueté consécutivement, si :

- `Prufer` est de type `Tableau` et contient le codage de Prüfer de  $A$ ,
- `n` est un entier qui contient le nombre de nœuds de  $A$ ,

alors `calculer_arites_par_Prufer(Prufer, n)` renvoie un tableau, de type `Tableau`, contenant les arités des nœuds de  $A$ .

Avant d'écrire la fonction `calculer_arites_par_Prufer`, on en donnera rapidement le principe.

□ 28 – Déterminer un arbre  $A$  étiqueté consécutivement dont le codage de Prüfer  $Pr(A)$  est : 2, 3, 0, 2, 2. On détaillera la démarche utilisée.

□ 29 – On considère un arbre  $A$ ; on suppose que l'ensemble des étiquettes  $E(A)$  de  $A$  est  $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13\}$ ; l'arbre  $A$  n'est donc pas étiqueté consécutivement; on suppose enfin que le codage de Prüfer  $Pr(A)$  de  $A$  est : 3, 10, 3, 7, 7, 5, 7, 5. Déterminer l'arbre  $A$ . On décrira succinctement la démarche utilisée.

□ 30 – Il s'agit d'écrire en langage de programmation une fonction `calculer_arbre` qui, à partir du codage de Prüfer d'un arbre  $A$  **étiqueté consécutivement**, calcule un codage racine-fils-frères de  $A$ .

**Caml** : Écrire en Caml une fonction `calculer_arbre` telle que, pour un arbre  $A$  possédant  $n$  nœuds et étiqueté consécutivement, si :

- `Prufer` est un vecteur de longueur  $n - 1$  contenant le codage de Prüfer de  $A$ ,
- `fils` et `freres` sont deux vecteurs de longueur  $n$ ,

alors `calculer_arbre Prufer fils freres` modifie les vecteurs `fils` et `freres` pour qu'ils correspondent respectivement aux tableaux `fils` et `freres` d'un codage racine-fils-frères de  $A$  et renvoie l'étiquette de la racine de  $A$ .

**Pascal** : Écrire en Pascal une fonction `calculer_arbre` telle que, pour un arbre  $A$  possédant  $n$  nœuds et étiqueté consécutivement, si :

- `Prufer` est de type `Tableau` et contient le codage de Prüfer de  $A$ ,
- `fils` et `freres` sont de type `Tableau`,
- `n` est un entier qui contient le nombre de nœuds de  $A$ ,

alors `calculer_arbre(Prufer, fils, freres, n)` modifie les tableaux `fils` et `freres` pour qu'ils correspondent respectivement aux tableaux `fils` et `freres` d'un codage racine-fils-frères de  $A$  et renvoie l'étiquette de la racine de  $A$ .

Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble de  $n$  entiers distincts positifs ou nuls; soit  $S(\mathcal{E})$  l'ensemble des suites de longueur  $n - 1$  dont tous les éléments sont dans  $\mathcal{E}$ , distincts ou non; soit enfin  $\mathcal{A}(\mathcal{E})$  l'ensemble des arbres enracinés non ordonnés, possédant  $n$  nœuds et étiquetés par les éléments de  $\mathcal{E}$ .

□ 31 – Montrer que l'application  $Pr$  qui, à un arbre appartenant à  $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ , associe son codage de Prüfer est une bijection entre  $\mathcal{A}(\mathcal{E})$  et  $S(\mathcal{E})$ .

□ 32 – Déterminer le cardinal de  $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ .