e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice1

R désigne l'ensemble des nombres réels et I est un intervalle de **R** non vide et non réduit à un point.

1° Enoncer le Théorème de Rolle.
2° Soit h une application de I vers **R**, dérivable sur I, et p un entier naturel, $p \geq 2$. On suppose que h s'annule p fois sur I, démontrer que h' s'annule au moins $p-1$ fois sur I.
3° On considère les applications a et b de $]0,+\infty[$ vers **R** définies par :
$a(x) = 3x^{-20} + x^{-10} + 4x^{10} + 2x^{20} + 11x^{30}$ et $b(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11}$.
On suppose que b s'annule au plus 3 fois dans $]0,+\infty[$. Montrer que a s'annule au plus 4 fois dans $]0,+\infty[$.
4° Soit n un entier naturel, $n \geq 1$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n)$ un élément de $\mathbf{R}^n$ avec $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots\ldots < \alpha_n$, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n)$ un élément de $\left(\mathbf{R}^*\right)^n$ et f_n l'application de $]0,+\infty[$ vers **R** définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, x^{\alpha_k} .$$

Démontrer que f_n s'annule au plus $n-1$ fois dans $]0,+\infty[$.
5° On considère le polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ suivant : $P = X^{400} - 7X^{201} - 4X^{101} + 1$.
Prouver que P admet au plus 6 racines réelles.

Exercice 2

R désigne l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel, $n \geq 2$.
On introduit les notations suivantes :
$M_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $M_{n,1}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices à n lignes, une colonne et à coefficients réels,
$GL_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbf{R})$,
$O_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbf{R})$,

$S_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbf{R})$, $S_n^+(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont toute valeur propre est positive ou nulle, $S_n^{++}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont toute valeur propre est strictement positive.

Pour toute matrice M on note : ${}^tM$ la transposée de M, m_{ij} le coefficient de M situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne de M, $\det(M)$ le déterminant de M lorsque M est une matrice carrée.

Partie A

Soit S une matrice de $S_n^+(\mathbf{R})$. Le but de cette partie est d'établir l'inégalité (1) :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii} .$$

Soit S une matrice de $S_n(\mathbf{R})$. On rappelle qu'il existe une matrice P de $O_n(\mathbf{R})$ et un élément $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n)$ de $\mathbf{R}^n$ tels que : ${}^tPSP = D$ où D est la matrice diagonale de $M_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall\, i \in \{1,2,\ldots.,n\}$, $d_{ii} = \lambda_i$.

1° Soit S une matrice de $S_n^+(\mathbf{R})$.

Déduire du rappel précédent :

a) qu'il existe M élément de $M_n(\mathbf{R})$ tel que : $S = {}^tM\,M$.

b) que pour tout X élément de $M_{n,1}(\mathbf{R})$: ${}^tX\,S\,X \geq 0$.

c) que : $\forall\, i \in \{1,2,\ldots.,n\}$, $s_{ii} \geq 0$.

2° Soit S une matrice de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ démontrer :

a) qu'il existe M élément de $GL_n(\mathbf{R})$ tel que : $S = {}^tM\,M$.

b) que pour tout X élément non nul de $M_{n,1}(\mathbf{R})$: ${}^tX\,S\,X > 0$.

c) que : $\forall\, i \in \{1,2,\ldots.,n\}$, $s_{ii} > 0$.

3° Soit S une matrice de $S_n^+(\mathbf{R})$ n'appartenant pas à $S_n^{++}(\mathbf{R})$. Etablir l'inégalité (1) pour S.

4° Soit S une matrice de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que : $\forall\, i \in \{1,2,\ldots.,n\}$, $s_{ii} = 1$.

a) Prouver que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$.

En déduire que : $\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\ldots.\lambda_n} \leq \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$.

b) Démontrer que l'inégalité (1) est vérifiée par S.

5° Soit S une matrice quelconque de $S_n^{++}(\mathbf{R})$. Soit T la matrice diagonale de $M_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall\, i \in \{1,2,\ldots.,n\}$, $t_{ii} = \dfrac{1}{\sqrt{s_{ii}}}$ et B la matrice de $M_n(\mathbf{R})$ définie par $B = TST$.

a) Montrer que pour tout X élément non nul de $M_{n,1}(\mathbf{R})$: ${}^tX\,B\,X > 0$.

b) En déduire que B appartient à $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

c) Démontrer que l'inégalité (1) est vérifiée par S.

Partie B

Dans cette partie on utilise l'inégalité (1) de la Partie A pour établir l'inégalité d'Hadamard . Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$.

1° Vérifier que l'on peut appliquer l'inégalité (1) à ${}^tA\,A$.

2° En déduire l'inégalité d'Hadamard : $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_{ki})^2}$.

Partie C

Dans cette partie on utilise l'inégalité d'Hadamard pour établir un résultat concernant les fonctions développables en série entière en 0 .

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $a_0 \neq 0$. Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ l'unique suite réelle vérifiant :

$$a_0 b_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 .$$

1° Pour $n \geq 1$, on considère la matrice A de $M_{n+1}(\mathbf{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_0 & 0 \\ a_n & \cdots & & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \text{ Calculer } A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vérifier que A appartient à $GL_{n+1}(\mathbf{R})$. Appliquer les formules de Cramer pour en déduire que $b_n = \dfrac{\det(A')}{\det(A)}$ où A' est une matrice de $M_{n+1}(\mathbf{R})$ à préciser .

2° On suppose qu'il existe un réel r strictement positif tel que la série de terme général $|a_n|\, r^n$ converge. On pose : $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, r^n = C$. Montrer que la série de terme général $(a_n)^2\ r^{2n}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2\ r^{2n} \leq C^2$.

3° Utiliser alors l'expression de b_n établie à la question 1° de la Partie C et l'inégalité d'Hadamard pour démontrer que : $\forall n \geq 1, |b_n| \leq \dfrac{1}{|a_0|}\alpha^n$ où α est un réel positif indépendant de n à préciser (on pourra considérer la matrice A'' de $M_{n+1}(\mathbf{R})$ obtenue à partir de A' en multipliant la i-ème ligne de A' par r^{i-1}, pour tout i élément de $\{1,2,....,n+1\}$).

4° Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ développable en série entière en 0 telle que $f(0) \neq 0$.

Montrer que la fonction $\dfrac{1}{f}$ définie au voisinage de 0 est développable en série entière en 0.

Exercice3

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction numérique F de la variable réelle x telle que :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch} t}\, dt\,.$$

1° Question préliminaire

Soit a une application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} a(t) = +\infty$. Soit p un entier naturel non nul, pourquoi l'égalité $e^{-a(t)} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{(a(t))^p}\right)$ est-elle vérifiée ?

2° Montrer que l'ensemble de définition de F est $\left]0,+\infty\right[$.

3° Prouver que F est de classe C^2 sur $\left]0,+\infty\right[$.

4° Montrer que F est solution sur $\left]0,+\infty\right[$ de l'équation différentielle : $y'' + \dfrac{1}{x}y' - y = 0$ (E).

5° Etude de $F(x)$ quand x tend vers 0^+.

Dans cette question, x est un réel vérifiant : $0 < x < 1$.

a) On pose $H(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xu}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u}\right)du$.

Montrer que H est définie et bornée sur $\left]0,1\right[$.

b) On pose $K(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-v}}{v}\, dv$.

Prouver que pour v élément de $[x,1]$ on a : $0 \le 1 - e^{-v} \le v$. En déduire que $K(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand x tend vers 0^+.

c) Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u^2-1}}du$.

d) Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 0^+.

6° Etablir que : $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} xF'(x) = 0$ (indication : on pourra considérer une suite quelconque $(x_n)_n$ d'éléments de $\left[1,+\infty\right[$ qui tend vers $+\infty$ et utiliser le théorème de la convergence dominée).

7° Soit G une solution non nulle de (E) sur $\left]0,+\infty\right[$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} G'(x) = 0$.

On rappelle que le wronskien de F et G est l'application notée W de $\left]0,+\infty\right[$ sur $\mathbf{R}$ définie par : $W = FG' - F'G$.

a) Vérifier que W est solution sur $\left]0,+\infty\right[$ de l'équation différentielle : $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ et pour $x > 0$, calculer $W(x)$.

b) En déduire qu'il existe un réel λ tel que pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$, $G(x) = \lambda F(x)$.