CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 6 pages.

Notations :

On note :

- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
- ln : la fonction logarithme népérien.

Pour tout nombre réel x tel que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge (resp. la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$ converge), on note $\theta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ (resp $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$) la somme de cette série.

Objectifs :

On se propose d'étudier quelques propriétés des fonctions θ et f.

Dans la partie I, on calcule trois valeurs exactes et une valeur approchée de $\theta(n)$ pour quatre entiers naturels n. La partie II est consacrée à une étude de la fonction f en liaison avec $\theta(2)$. Dans la partie III, on étudie de façon plus précise la continuité et le caractère C^1 de la fonction θ.

PARTIE I

Quelques valeurs de la fonction θ

I.1/ Calcul de $\theta(1)$.

I.1.1/ Préciser, selon la valeur du nombre réel x, la limite de $\frac{1}{n^x}$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

I.1.2/ Montrer que l'ensemble de définition de la fonction θ est $E =]0\ ;+\infty[$.

I.1.3/ Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n dt$.

I.1.3.1/ Préciser une primitive de la fonction $t \mapsto \tan t$ et calculer J_1.

I.1.3.2/ Montrer que la suite J_n est convergente et préciser sa limite.

I.1.3.3/ Calculer $J_n + J_{n+2}$ pour tout entier naturel n.

I.1.3.4/ En utilisant le résultat obtenu en I.1.3.3/, établir (par exemple par récurrence), pour tout entier naturel n non nul, la relation : $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = J_1 + (-1)^{n+1} J_{2n+1}$.

I.1.3.5/ En déduire la valeur de $\theta(1)$.

I.2/ Une valeur approchée de $\theta(3)$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$.

I.2.1/ Décrire, en français, un algorithme de calcul de S_n pour n entier naturel non nul donné.

I.2.2/ En utilisant l'algorithme précédent et la calculatrice, donner la valeur décimale approchée par défaut σ de S_{30} à la précision 10^{-4}.

I.2.3/ Montrer que σ est aussi la valeur décimale approchée par défaut de $\theta(3)$ à la précision 10^{-4}.

I.3/ Calcul de $\theta(2)$ et $\theta(4)$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, 2π -périodique et vérifiant :

$$g(x) = x^2 \text{ pour tout } x \in]-\pi\ ;\ \pi].$$

Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = \int_0^\pi x^2 \cos(nx)\,dx$.

I.3.1/ Calculer α_n pour tout entier naturel n.

I.3.2/ Expliciter les coefficients de Fourier réels $a_n(g)$ et $b_n(g)$ de la fonction g.
On rappelle que pour tout entier naturel n :

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{et} \quad b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx.$$

I.3.3/ Justifier la convergence, pour tout x réel, de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$ et expliciter sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$ pour tout $x \in]-\pi\ ;\ \pi]$.

I.3.4/ En déduire la valeur de $\theta(2)$.

I.3.5/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$ et calculer la valeur de sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

I.3.6/ En utilisant le résultat obtenu en I.3.3/, établir la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$ et expliciter sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$ pour $x \in]-\pi\ ;\ \pi]$.

I.3.7/ Justifier, pour tout x réel, la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nx)$ et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nx)$ pour $x \in]-\pi\ ;\ \pi]$ en fonction de x et $\theta(4)$.

I.3.8/ En déduire la valeur de $\theta(4)$.

PARTIE II

Etude d'une fonction

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel x, on note $u_n(x) = \ln\left(1+e^{-nx}\right)$.

Pour tout nombre réel x tel que la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ la somme de cette série. On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction f en utilisant en particulier $\theta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

II.1/ Montrer que la fonction f est définie sur $]0\ ;+\infty[$.

On note désormais $\mathcal{E}$ l'image par f de l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

II.2/ Montrer que la fonction f est continue sur $]0\ ;+\infty[$.

II.3/ Montrer que la fonction f est strictement monotone sur $]0\ ;+\infty[$.

II.4/ Justifier l'affirmation : $\mathcal{E}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

II.5/ Montrer que la fonction f admet une limite finie λ (que l'on précisera) en $+\infty$.

II.6/ Pour tout nombre réel x strictement positif, on désigne par ψ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\psi_x(t) = \ln\left(1+e^{-tx}\right).$$

II.6.1/ Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\ dt$.

II.6.2/ Etablir, pour tout nombre réel $x>0$, la double inégalité :

$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\ dt \leq f(x) \leq \ln 2 + \int_0^{+\infty} \psi_x(t)\ dt.$$

II.6.3/ Montrer l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,dy$ et exprimer sa valeur en fonction de $\theta(2)$.

II.6.4/ Montrer qu'il existe une constante μ (que l'on précisera) telle que pour tout nombre réel x strictement positif, on ait la double inégalité :

$$\frac{\mu}{x} \leq f(x) \leq \lambda + \frac{\mu}{x}.$$

II.6.5/ En déduire la limite de $xf(x)$ lorsque x tend vers 0 et préciser l'intervalle $\mathcal{E}$.

PARTIE III

Propriétés de la fonction θ

Rappel : $\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

III.1/ Montrer que pour tout nombre réel x de $E =]0\ ;+\infty[$, on a la double inégalité

$$1 - \frac{1}{2^x} \leq \theta(x) \leq 1.$$

III.2/ En déduire que la fonction θ est bornée sur E et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$; on précisera cette limite.

III.3/ Continuité de la fonction θ.

III.3.1/ En utilisant la notion de convergence normale, montrer que la fonction θ est continue sur l'intervalle $]1\ ;+\infty[$.

III.3.2/ Montrer que la fonction θ est continue sur E.

III.4/ Caractère C^1 de la fonction θ.

III.4.1/ Soit x un nombre réel fixé strictement positif, on désigne par φ_x la fonction définie sur l'intervalle $[2\ ;+\infty[$ par $\varphi_x(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$.

Etudier les variations de la fonction φ_x sur l'intervalle $[2\ ;+\infty[$; on précisera l'étude dans les deux cas :

III.4.1.1/ lorsque $x \geq \frac{1}{\ln 2}$.

III.4.1.2/ lorsque $x \in \left]0\ ;\ \frac{1}{\ln 2}\right[$.

III.4.2/ Démontrer de façon rigoureuse que la fonction θ est de classe C^1

III.4.2.1/ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\ln 2}\ ;+\infty\right[$,

III.4.2.2/ sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

III.4.3/ Déterminer le signe

III.4.3.1/ de $\theta'(2)$,

III.4.3.2/ de $\theta'(1)$.

Fin de l'énoncé.