e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Le problème comporte quatre parties qui peuvent être traitées de façon largement indépendante.
Notations : n est un entier supérieur ou égal à 2.
$\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.
$\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des réels strictement positifs.
a est un paramètre réel.
Objectifs : Etude d'une famille d'applications linéaires et d'équations différentielles associées à ces applications linéaires .

1 Premiére partie : Etude de l'application :

$$\begin{array}{llll} \mathcal{A}_a : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & X(X+1)P''(X) \ + \ (aX-1)P'(X). \end{array}$$

1.1 Propriétés élémentaires de $\mathcal{A}_a$.

1.1.1) Montrer que $\mathcal{A}_a$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

1.1.2) Ecrire la matrice M_a de $\mathcal{A}_a$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, $(X^k, 0 \leq k \leq 3)$.

1.1.3) Etude du cas particulier $a = -4$.

a) La matrice $M_{-4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\mathcal{A}_{-4}$.

1.1.4) a) Déterminer en fonction du réel a les valeurs propres de $\mathcal{A}_a$.

b) Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme $\mathcal{A}_a$ admet-il des valeurs propres doubles ?

c) Existe-t-il une valeur du réel a pour laquelle $\mathcal{A}_a$ admet une valeur propre triple ?

1.1.5) Pour quelles valeurs de a, $\mathcal{A}_a$ est-il diagonalisable ?

1.1.6) Pour quelles valeurs du réel a le degré du polynôme $\mathcal{A}_a(P)$ est-il égal au degré de P, pour tout polynôme P non constant de $\mathbb{R}_3[X]$?

1.2 Etude de cas particuliers.

On suppose dans tout ce paragraphe que a n'appartient pas à $\{-2, -1, 0\}$.

1.2.1) Déterminer $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_a)$ par la donnée d'une de ses bases.

1.2.2) Montrer que $(-1 + aX, X^2, X^3)$ est une base de $\mathrm{Im}(\mathcal{A}_a)$.

1.2.3) Discuter selon $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq 3$, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ solutions de l'équation :

$$X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X) = X^p.$$

2 Deuxième partie : Quelques propriétés de l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}_{(a,n)}: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & X(X+1)P''(X) \ + \ (aX-1)P'(X). \end{array}$$

2.1) Justifier rapidement que $\mathcal{A}_{(a,n)}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.2) Ecrire la matrice M_a de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, $(X^k, 0 \leq k \leq n)$.

2.3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est une valeur propre de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ tel que $\lambda \ = \ k(a \ + \ k-1)$.

2.4) Montrer que si $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'endomorphisme $\mathcal{A}_{(a,n)}$ est diagonalisable.
Dans le cas particulier où $a \ = \ 0$, $\mathcal{A}_{(0,n)}$ est -il diagonalisable ?

3 Troisième partie : Recherche de solutions développables en série entière d'une équation différentielle.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies dans l'intervalle ouvert $]-1,+1[$ et qui sont des sommes de séries entières dans cet intervalle : ainsi f appartient à $\mathcal{E}$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que pour tout $x \in]-1,+1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3.1) Montrer que si $f \in \mathcal{E}$ alors f est de classe C^∞ sur $]-1,+1[$.

On considère alors dans toute cette partie l'endomorphisme $\mathcal{D}_a$ de $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}_a: & \mathcal{E} & \to & \mathcal{E} \\ & f & \longmapsto & \mathcal{D}_a(f) \end{array}$$

où $\quad \mathcal{D}_a(f)(x) = \ x(x+1)f''(x) \ + \ (ax-1)f'(x)$ pour tout $x \in]-1,+1[$.

3.2) Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $\mathcal{D}_a(f) = af$. On pose pour tout $x \in]-1,+1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n-1)((n+a)a_n + (n+1)a_{n+1}) = 0.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:

$$a_n \ = \ \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!} a_2$$

et dans le cas particulier où $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, donner les valeurs de a pour lesquelles la série entière est un polynôme ; on déterminera alors son degré et son coefficient dominant en fonction de a.

c) Déterminer, selon $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

3.3) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathcal{E}$ de $\mathcal{D}_a(f) = af$.

3.4) Comparer, selon $a \in \mathbb{R}$, les dimensions des sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_{(a,n)} - aId_{\mathbb{R}_n[X]})$ et $\mathrm{Ker}(\mathcal{D}_a - aId_{\mathcal{E}})$.

4 Quatrième partie : Résolution d'une équation différentielle

On note $\mathcal{C}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et Δ_a l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty$:

$$\Delta_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty & \to & \mathcal{C}^\infty \\ f & \longmapsto & \Delta_a(f) \end{array}$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Delta_a(f)(x) = \ x(x+1)f"(x) \ + \ (ax-1)f'(x)$.

4.1) On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad x(x+1)y" \ + \ (ax-1)y' \ -2(a+1)y \ = \ 0 \ .$$

Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.2) Soit φ une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (E), on pose $\varphi(x) = x^2.\psi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que ψ est une fonction de $\mathcal{C}^\infty$, et que ψ' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Peut-on prévoir ce résultat ?
Déterminer cette équation différentielle.

4.3) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E_1) \quad x(x+1)u' \ + \ ((4+a)x \ + \ 3)u = 0.$$

En déduire ψ'.

4.4) On se place dans le cas particulier $a \ = \ -4$.
a) Résoudre (E).
b) Comparez les dimensions des sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_{-4} + 6Id_{\mathbb{R}_3[X]})$ et $\mathrm{Ker}(\Delta_{-4} + 6Id_{\mathcal{C}^\infty})$.