Concours Centrale - Supélec 2008

Épreuve : MATHÉMATIQUES II **Filière** MP

Notations

- Dans tout le problème n est un entier supérieur à 2, $\mathcal{M}_n$ est l'ensemble des matrices carrées à n lignes, à coefficients réels.
- On note $(E_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_n$. Ainsi, pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et n, tous les coefficients de la matrice E_{ij} sont nuls sauf le coefficient d'indices (i,j) qui vaut 1. On rappelle le résultat suivant :
$$\forall i,j,k,l \in \{1,...,n\}, E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$$
où $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ et 0 sinon.
- Pour tout couple (p,q) d'entiers strictement positifs, on note $\mathcal{M}_{p,q}$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients réels.
- Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_{p,q}$, on note ${}^tM$ sa matrice transposée.
- L'espace $\mathbb{R}^n$ est identifié à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}$. On note $\mathcal{B} = (\mathbf{e_1}, ..., \mathbf{e_n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, pour tout entier k compris entre 1 et n, $\mathbf{e_k} = {}^t(0,...,0,1,0...,0)$ où 1 est en $k^{\text{ième}}$ position.
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Pour tout couple $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = {}^t(u_1,...,u_n)$ et $\mathbf{v} = {}^t(v_1,...,v_n)$, on note $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = {}^t\mathbf{u}.\mathbf{v} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k v_k$ leur produit scalaire.
- Pour tout couple d'entiers p,q tels que $p \leqslant q$, on note :
$$[[p,q]] = \{k \in \mathbb{N}, p \leqslant k \leqslant q\}.$$
- Étant donné ${}^t(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $D = \mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n) \in \mathcal{M}_n$ la matrice diagonale telle que, pour tout i de $[[1,n]]$, $d_{ii} = \alpha_i$.
On note $I_n = \mathrm{diag}(1,1,....,1)$ la matrice de l'identité.

Soit $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n$. On considère le système linéaire
$$A\mathbf{u} = \mathbf{w}, \tag{1}$$
où $\mathbf{w} = {}^t(w_1,....,w_n) \in \mathbb{R}^n$ est donné, et $\mathbf{u} = {}^t(u_1,...,u_n)$ est l'inconnue. L'objet du problème est l'étude de quelques méthodes de résolution de ce système linéaire. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Partie I - Méthode de Gauss et factorisation

Le but de cette partie est de représenter matriciellement la méthode de Gauss pour la résolution du système (1).
On note $\mathcal{TS}_n \subset \mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices $M = [m_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ triangulaires supérieures (c'est-à-dire $m_{ij} = 0$ pour $i > j$) et $\mathcal{TI}_n \subset \mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrice triangulaires inférieures à diagonale unité (c'est-à-dire $m_{ii} = 1$ et $m_{ij} = 0$ pour $i < j$). Dans toute cette partie, on suppose que $\det(A) \neq 0$, de sorte que le système (1) admette une unique solution $\mathbf{u} = {}^t(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$.

I.A - Résolution d'un système triangulaire

On suppose dans cette question que $A \in \mathcal{TS}_n$.

I.A.1) Calculer u_n puis pour $k \in [[1, n-1]]$ exprimer u_{n-k} en fonction de u_n, u_{n-1}, ..., u_{n-k+1}. Écrire l'algorithme de résolution du système (1).

I.A.2) Exprimer en fonction de n le nombre d'additions, de multiplications et de divisions nécessaires à la résolution du système (1).

I.B - Matrices d'élimination de Gauss

La matrice A de $\mathcal{M}_n$ est de nouveau quelconque avec $\det A \neq 0$.
Étant donné $M = [m_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n$, on note pour tout entier q de $[[1, n]]$, $\Delta_q(M)$ la sous-matrice de M définie par $\Delta_q(M)=[m_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant q}$ élément de $\mathcal{M}_q$, et on note $D_q(M) = \det \Delta_q(M)$ ($D_1(M)$,...,$D_n(M)$ sont appelés les mineurs principaux de M).
Par ailleurs, on note $L_i(M)$ le $i^{\text{ième}}$ vecteur ligne de la matrice M et défini par $L_i(M) = (m_{i1}, m_{i2}, ..., m_{in})$. On note aussi $C_j(M)$ le $j^{\text{ième}}$ vecteur colonne de M défini par $C_j(M) = {}^t(m_{1j}, m_{2j}, ..., m_{nj})$. On dira aussi dans la suite les lignes L_i de M et les colonnes C_j de M.

I.B.1) Soient M une matrice de $\mathcal{M}_n$ et $P = MA$. Exprimer, pour tout entier q de $[[1, n]]$, $L_q(P)$ en fonction des lignes $L_i(A)$ de la matrice A.

(*On pourra, si l'on veut, utiliser la décomposition de* $L_q(P)$ *sous la forme* $\sum_{j=1}^{n} p_{qj}E_{qj}$ *avec* $P = (p_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$).

I.B.2) Pour un entier k de $[[1, n-1]]$ et un vecteur $\boldsymbol{\beta} = {}^t(\beta_{k+1}, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$, on note $F(k, \boldsymbol{\beta})$ la matrice de $\mathcal{M}_n$ qui réalise par le produit à gauche $P = F(k, \boldsymbol{\beta})A$ les combinaisons linéaires de lignes suivantes, en notant pour simplifier $L_i = L_i(A)$ et $L'_i = L_i(P)$:

$$\forall i \in [[1, k]], \quad L'_i = L_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [[k+1, n]], \quad L'_i = L_i + \beta_i L_k. \tag{2}$$

a) Montrer que $F(k, \boldsymbol{\beta})^{-1} = F(k, -\boldsymbol{\beta})$.

b) Montrer que si $P = F(k, \boldsymbol{\beta})A$ on a :

$$\forall q \in [[1, n]], \quad D_q(P) = D_q(A).$$

c) Déterminer les coefficients ϵ_{ij} de $F(k, \boldsymbol{\beta})$ pour tout couple (i, j) d'entiers de $[[1, n]] \times [[1, n]]$. Montrer que $F(k, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{TI}_n$.

I.B.3)

a) Étant donnée une matrice $M = [m_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n$, exprimer les vecteurs colonnes C'_j du produit matriciel $MF(k, \boldsymbol{\beta})$ en fonction des colonnes C_j de M.

b) Soit q un entier de $[[1, n]]$ et pour tout entier k de $[[1, q]]$, $\boldsymbol{\beta_k} = {}^t(\beta_{k+1,k}, ..., \beta_{n,k})$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n-k}$. On considère la matrice produit

$$P_q = F(1, \boldsymbol{\beta_1}).F(2, \boldsymbol{\beta_2})...F(q, \boldsymbol{\beta_q}) = \prod_{k=1}^{q} F(k, \boldsymbol{\beta_k}). \tag{3}$$

On note C_j^q les vecteurs colonnes de la matrice P_q et pour tout entier k de $[[1, q]]$, $\mathbf{b_k} = {}^t(0, ..., 0, 1, \beta_{k+1,k}, ..., \beta_{n,k}) \in \mathbb{R}^n$.

Montrer par récurrence sur q que :

$$\forall\, j \in [[q+1, n]], \quad C_j^q = e_j \quad \text{et} \quad \forall\, j \in [[1, q]], \quad C_j^q = b_j.$$

En déduire que P_q appartient à $\mathcal{TI}_n$ et que $P_{n-1} = [\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_{n-1}}, \mathbf{e_n}]$.

I.C - Factorisation de A

Dans cette question, on suppose que pour chaque $k \in [[1, n]]$, $\Delta_k(A)$ est inversible. On note $A_1 = A = [a_{ij}^1]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice initiale.

I.C.1) Montrer que $a_{11}^1 \neq 0$. Déterminer $\boldsymbol{\beta_1} = {}^t(\beta_{21}, ..., \beta_{n1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pour que la première colonne de $A_2 = F(1, -\boldsymbol{\beta_1})A_1$ soit proportionnelle à $\mathbf{e_1}$. Que vaut la première ligne de A_2 ?

I.C.2) On pose $F_1 = F(1, -\boldsymbol{\beta_1})$.

a) Montrer par récurrence sur k l'existence des suites de matrices $(F_{k-1})_{2\leqslant k\leqslant n}, (A_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ avec

$$F_{k-1} = F(k-1, -\boldsymbol{\beta_{k-1}}) \qquad A_k = [a_{ij}^k]_{1\leqslant i,j\leqslant n} = F_{k-1}A_{k-1}$$

et telles que :

$$\forall j \in [[1, k-1]],\ \forall i \in [[j+1, n]],\ a_{ij}^k = 0 \quad \text{et} \quad \forall m \in [[1, n]], \quad D_m(A_k) \neq 0. \quad (4)$$

Exprimer le vecteur $\boldsymbol{\beta_k}$ à l'aide des coefficients de A_k.

b) Montrer que les lignes 1 à k de A_k et A_{k+1} sont identiques.

c) Pour $k \in [[1, n-1]]$, soit N_k le nombre de multiplications nécessaires pour passer de A_k à A_{k+1}. Calculer le nombre N_k.

I.C.3)

a) Déduire des questions précédentes qu'il existe une matrice L de $\mathcal{TI}_n$ et une matrice U de $\mathcal{TS}_n$ telles que l'on ait

$$A = LU. \quad (5)$$

b) Exprimer les coefficients l_{ij} de L pour $i > j$ et les coefficients u_{ij} de U pour $i \leqslant j$ en fonction des coefficients a_{ij}^k des matrices A_k (Utiliser (I.B.2a) et (I.C.2a)).

I.C.4) Montrer que les matrices L et U de la factorisation (5) sont uniques.

I.C.5) Écrire dans le langage de son choix un programme réalisant la factorisation $A = LU$ qui n'utilise qu'un seul tableau carré encore nommé A pour contenir toutes les itérations A_k. On prendra soin de commenter les principales lignes du programme. Comment aura-t-on en final les facteurs L et U à partir du tableau A ?

I.C.6) Soit S_n le nombre de multiplications nécessaires à la factorisation $A = LU$. Calculer S_n (*Indication* : utiliser la question I.C.2.c.)

Partie II - Applications et cas particuliers

Dans cette partie, on applique à certains exemples la factorisation vue en Partie I. Par commodité d'écriture, lorsque l'on représente une matrice, les espaces laissés vides sont remplis de 0 qui ne sont pas systématiquement écrits.

II.A - Application à la résolution de systèmes linéaires

II.A.1) On veut résoudre le système (1) en utilisant la factorisation (5). On fait toujours l'hypothèse que pour tout entier k de $[[1, n]]$, $D_k(A) \neq 0$.

Sans compter les opérations nécessaires à la factorisation, montrer qu'il suffit de $n(n-1)$ multiplications pour résoudre le système (préciser la méthode utilisée).

II.A.2) En déduire une méthode pour inverser la matrice A en utilisant la factorisation (5). Exprimer le nombre total de multiplications et divisions nécessaires à cette inversion, incluant cette fois-ci le calcul de la factorisation. En donné un équivalent lorsque $n \to \infty$.

II.B - Étude du cas tridiagonal

On suppose la matrice A tridiagonale, c'est-à-dire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

II.B.1) On pose $\delta_k = D_k(A)$, $\delta_0 = 1$. On suppose que pour tout k de $[[1, n]]$, $\delta_k \neq 0$. Calculer δ_1 puis, pour $k \in [[2, n]]$, exprimer δ_k en fonction de δ_{k-1} et de δ_{k-2}.

II.B.2) Montrer que les matrices L et U de la factorisation (5) sont de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & \\ & l_{32} & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

avec pour tout i de $[[2, n]]$, $l_{i,i-1} = a_i \dfrac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}}$,

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & & & \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & c_2 & & & \\ & & \frac{\delta_3}{\delta_2} & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

II.B.3) Écrire un algorithme de résolution du système $A\mathbf{u} = \mathbf{w}$ en utilisant la factorisation précédente pour une matrice tridiagonale. Donner le nombre de multiplications, de divisions et d'additions nécessaires à cette résolution.

II.C - Étude d'un exemple

Soit $A_n = [a_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n$, symétrique et tridiagonale définie par

$$\forall\, i \in [[1,n]],\ a_{ii} = 2, \quad \forall\, i \in [[2,n-1]],\ a_{i\,i+1} = a_{i\,i-1} = -1,\ a_{1\,2} = a_{n\,n-1} = -1$$

tous les autres coefficients étant nuls, c'est-à-dire

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

II.C.1)

a) Montrer que pour chaque $\mathbf{v} = {}^t(v_1, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$< A_n\mathbf{v}, \mathbf{v} >= v_1^2 + v_n^2 + \sum_{i=2}^{n}(v_i - v_{i-1})^2.$$

b) En déduire que la matrice A_n est définie positive.

c) Montrer que pour chaque k de $[[1,n]]$ la matrice $\Delta_k(A_n)$ est symétrique et définie positive. En déduire qu'il existe une factorisation $A_n = L_nU_n$ de la forme (5).

II.C.2) On reprend les notations de la question II.B. Expliciter et résoudre la récurrence sur δ_k. En déduire l'expression des matrices L_n et U_n.

II.C.3) On veut résoudre le système $A_n\mathbf{x} = \mathbf{e_k}$ pour un entier fixé $k \in [[1,n]]$.

a) Résoudre le système $L_n\mathbf{y} = \mathbf{e_k}$.

b) Résoudre le système $U_n\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(*On montrera que :* $x_i = \dfrac{i(n+1-k)}{n+1}$ *si* $i \leqslant k$ *et* $x_i = \dfrac{k(n+1-i)}{n+1}$ *si* $i \geqslant k$).

II.C.4) On pose $A_n^{-1} = [b_{ij}]_{1\leq j,k\leq n}$. Calculer b_{ij} pour $(i,j) \in [[1,n]] \times [[1,n]]$.

Partie III - Une méthode itérative

III.A -

Soit $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n$. On étudie ici une méthode itérative de résolution du système (1). On utilise la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, définie par $||\mathbf{x}||^2 =< \mathbf{x}, \mathbf{x} >= \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, avec $\mathbf{x} = {}^t(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On rappelle que la norme matricielle subordonnée de $A \in \mathcal{M}_n$ est définie par $||A|| = \sup_{||\mathbf{x}||=1} ||A\mathbf{x}||$.

III.A.1)

a) Exprimer $||A\mathbf{x}||^2$ en fonction de $B = {}^tA.A$ et de $\mathbf{x}$. En déduire que B est une matrice symétrique positive.
On note $\mathrm{sp}(B) = \{\lambda_1(B), ..., \lambda_n(B)\}$ le spectre de B, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de B énoncées de sorte que $\lambda_1(B) \leq ... \leq \lambda_n(B)$.

b) Montrer que $||A|| = \sqrt{\lambda_n(B)}$.

c) On suppose que A est symétrique et on note $\rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{sp}(A)} |\lambda|$, où $\mathrm{sp}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A. Montrer que l'on a $||A|| = \rho(A)$.

III.A.2) On note H une matrice de $\mathcal{M}_n$ et $\mathbf{c}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tels que le système (1) peut se réécrire sous la forme

$$\mathbf{u} = H\mathbf{u} + \mathbf{c} \tag{7}$$

Soit $\mathbf{U_0} \in \mathbb{R}^n$. On considère la suite vectorielle itérée $(\mathbf{U_k})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrrence $\mathbf{U_{k+1}} = H\mathbf{U_k} + \mathbf{c}$. Montrer que, si $||H|| < 1$, la suite $(\mathbf{U_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}^n$ de limite $\mathbf{u}$, solution de l'équation (7).

III.A.3) Dans les questions qui suivent, on applique la méthode itérative ci-dessus au système $A_n\mathbf{u} = \mathbf{w}$ où A_n est définie en II.C par (6). On décompose A_n en

$$A_n = 2I_n - M_n. \tag{8}$$

a) Calculer les valeurs propres de M_n (*Indication :* interpréter le système $M_n\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ comme une équation récurrente sur la suite $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ avec $x_0 = x_{n+1} = 0$. (On constatera qu'il n'y a de solution non nulle que si $|\lambda| < 2$).

b) En déduire qu'il existe une suite de réels $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ \mu_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0, \quad ||M_n|| = 2 - \mu_n.$$

c) Donner un équivalent de μ_n quand n tend vers l'infini.

III.A.4) On considère la décomposition (8). On choisit la donnée initiale $\mathbf{U_0}$ de sorte que $||\mathbf{U_0}|| = 1$. On suppose en outre que $||\mathbf{w}|| = 1$.

a) On choisit $H = \dfrac{M_n}{2}$. Expliciter le vecteur $\mathbf{c}$ de manière à appliquer la méthode itérative puis donner l'expression complète de $\mathbf{U_k}$ en fonction de $\mathbf{U_0}$, de $\mathbf{c}$ et des matrices H^m pour $m \in [[1, k]]$.

b) Majorer l'erreur $\epsilon_k = ||\mathbf{U_k} - \mathbf{u}||$ en fonction de k, μ_n et $||A_n^{-1}||$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} ||A_n^{-1}|| = +\infty$ et donner un équivalent de $||A_n^{-1}||$ pour n tendant vers l'infini.

d) Déterminer un nombre d'itérations k suffisant pour avoir $\epsilon_k < 10^{-4}$. Donner un équivalent du nombre de multiplications pour obtenir cette approximation et comparer à la méthode de factorisation LU. Pour n grand, quelle méthode est préférable ?

••• FIN •••