ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2007

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Majoration de polynômes trigonométriques

Soit p un réel strictement supérieur à 1 et $q = p/(p-1)$. On admet que si u et v sont deux fonctions continues, à valeurs réelles, définies sur l'intervalle $[c, d] \subset \mathbf{R}$, alors

$$\left| \int_c^d u(x)v(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \left(\int_c^d |u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_c^d |v(x)|^q \, \mathrm{d}x \right)^{1/q}. \qquad (1)$$

Soit n un entier non nul, $r = (r_1, \cdots, r_n) \in \mathbf{R}^n$ où pour tout k, r_k est un réel positif et $r \neq 0$. On introduit sur $\mathbf{R}^n$, les deux normes suivantes :

$$\|r\| = (r_1^2 + \ldots + r_n^2)^{1/2} \text{ et } \|r\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |r_j|.$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, on pose

$$P_r(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} r_k \cos(kx - \alpha_k).$$

Si s est un réel positif, on note

$$I_s(\alpha) = \int_0^{2\pi} |P_r(x, \alpha)|^{2s} \, \mathrm{d}x.$$

Dans la suite, t désigne un réel supérieur ou égal à 1.

L'objectif de ce problème est de montrer que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} \inf_{\alpha \in \mathbf{R}^n} |P_r(x, \alpha)|$$

est fini et d'obtenir un majorant fonction de r.

I Préliminaires

❏ 1 - Soit $\varphi(\lambda) = \lambda^{2t}(1-\lambda)^2$ pour $\lambda \in [0,1]$. Calculer $\max\limits_{\lambda\in[0,1]} \varphi(\lambda)$.

❏ 2 - Soit ψ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\psi(x) = |x|^{2t}$. Montrer que ψ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et calculer ψ' et ψ''.

❏ 3 - Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2. Prouver que $l = |h|^{2t}$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et calculer l' et l''.

II Propriétés de I_t

Pour $\alpha \in \mathbf{R}^n$, on introduit la fonction L_α définie par

$$L_\alpha : [-1,1] \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$(\varepsilon, \beta) \longmapsto I_t(\alpha + \varepsilon\beta).$$

❏ 4 - Montrer que pour tout $\beta \in \mathbf{R}^n$, la fonction $(\varepsilon \mapsto L_\alpha(\varepsilon, \beta))$ est dérivable et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.

❏ 5 - Montrer que pour tout $\beta \in \mathbf{R}^n$, la fonction $(\varepsilon \mapsto L_\alpha(\varepsilon, \beta))$ est deux fois dérivable et exprimer sa dérivée seconde sous forme d'intégrale.

❏ 6 - Établir que

$$I_t(\alpha+\beta) - I_t(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial L_\alpha}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \beta)\, \mathrm{d}\varepsilon,$$

puis montrer que I_t est continue sur $\mathbf{R}^n$.

❏ 7 - En utilisant les propriétés de L_α, montrer que les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 I_t}{\partial \alpha_k^2} \text{ pour } k = 1, \cdots, n,$$

existent et les exprimer sous forme d'intégrales.

❏ 8 - Montrer que I_t est une fonction bornée sur $\mathbf{R}^n$, qui atteint son minimum.

On note $\tilde{\alpha}$ l'un des points où le minimum est atteint.

❏ 9 - Montrer que pour tout $\beta \in \mathbf{R}^n$,

$$\frac{\partial^2 L_{\tilde{\alpha}}}{\partial \varepsilon^2}(0,\beta) \geq 0 \text{ puis que } \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 I_t}{\partial \alpha_k^2}(\tilde{\alpha}) \geq 0.$$

❏ 10 - Établir alors l'inégalité suivante :

$$I_t(\tilde{\alpha}) \leq (2t-1)\,\|r\|^2\, I_{t-1}(\tilde{\alpha}). \tag{2}$$

❏ 11 - Établir la majoration suivante :

$$I_t(\tilde{\alpha}) \leq 2\pi\Big((2t-1)\|r\|^2\Big)^t.$$

III Propriétés de P_r

Dans cette partie, α est un élément quelconque de $\mathbf{R}^n$ fixé.

❏ 12 - Établir les deux identités

$$\int_0^{2\pi} P_r(x,\alpha)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} |P_r(x,\alpha)|^2\,\mathrm{d}x = \pi\|r\|^2.$$

❏ 13 - Montrer que la borne supérieure $S = \sup_{x\in\mathbf{R}} |P_r(x,\alpha)|$ est finie et qu'il existe $x_\alpha \in \mathbf{R}$ tel que

$$|P_r(x_\alpha,\alpha)| = \sup_{x\in\mathbf{R}} |P_r(x,\alpha)|.$$

❏ 14 - Montrer que $\|r\|^2 \leq 2S^2$.

❏ 15 - Montrer que la fonction $x \mapsto P_r(x,\alpha)$ est non identiquement nulle et n'est pas de signe constant.

❏ 16 - Soit $\lambda \in]0,1[$. Soit $V_\lambda^+ = \{\xi \in [x_\alpha, x_\alpha + 2\pi],\ |P_r(\xi,\alpha)| = \lambda S\}$. Montrer que V_λ^+ est un ensemble compact non vide.

Soit $b = \min\{\xi, \xi \in V_\lambda^+\}$.

❏ 17 - Montrer qu'il existe a tel que :

$$a < x_\alpha < b \text{ et } b - a < 2\pi,$$

$$|P_r(a,\alpha)| = |P_r(b,\alpha)| = \lambda S,$$

$$|P_r(x,\alpha)| > \lambda S \text{ pour tout } x \in]a,b[.$$

❏ 18 - Établir les relations

$$2(1-\lambda)S = \left| \int_a^b \frac{\partial P_r}{\partial x}(x,\alpha)\,\mathrm{d}x \right|$$

et

$$\Big(2(1-\lambda)S\Big)^2 \leq (b-a) \int_a^b \left| \frac{\partial P_r}{\partial x}(x,\alpha) \right|^2\,\mathrm{d}x.$$

❏ 19 - Établir l'inégalité suivante :

$$\int_a^b \left| \frac{\partial P_r}{\partial x}(x,\alpha) \right|^2\,\mathrm{d}x \leq \pi \sum_{k=1}^{n} k^2 r_k^2.$$

IV Majoration

❏ 20 - Établir les inégalités suivantes :

$$\frac{2}{\pi} \frac{\|r\|^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 r_k^2} (1-\lambda)^2 \leq (b-a) \leq I_t(\tilde{\alpha})(\lambda S)^{-2t}.$$

❏ 21 - Montrer qu'il existe une constante A, indépendante de n, r, t et $\tilde{\alpha}$, telle que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$S^2 \leq At \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 r_k^2 \right)^{1/t} \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2 \right)^{1-1/t}.$$

Fin du problème