CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1

C est l'ensemble des nombres complexes, **R** celui des nombres réels et n est un entier naturel, $n \geq 2$. Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des éléments de **C** **non tous nuls** et P le polynôme de $\mathbf{C}[X]$ défini par : $P = X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_{n-1} X + a_n$.

Dans tout cet exercice z désigne une racine dans C de P.

Le but de l'exercice est d'établir par deux méthodes différentes une majoration de $|z|$ en fonction des coefficients de P. Les deux parties qui suivent sont indépendantes.

Partie A Utilisation de méthodes algébriques.

On note E le **C**-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans **C**. I_n est la matrice identité de E.

On note F le ***C***-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients dans **C**. Pour X élément de F, on note x_i l'élément de la i-ème ligne de X.

Pour M élément de E, m_{ij} est le coefficient de M situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne de M.

1° Soit M une matrice de E. On suppose que M n'est pas inversible.

a) Montrer qu'il existe X élément de F tel que : $M X = 0$ et $\max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 1$.

b) En déduire qu'il existe i élément de $\{1, 2, ..., n\}$ tel que $|m_{ii}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |m_{ij}|$.

2° Soit N la matrice de E définie par : $n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i-1 \\ -a_{n+1-i} & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Par exemple pour $n = 4$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_4 \\ 1 & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que, si λ est un élément quelconque de **C**, $\det(N - \lambda I_n) = (-1)^n P(\lambda)$.

3° Déduire des 2 questions précédentes que $|z| \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.

<u>Partie B</u> Utilisation de méthodes analytiques.
Soit Q le polynôme de $\mathbf{R}[X]$ défini par : $Q = X^n - |a_1| X^{n-1} - .... - |a_{n-1}| X - |a_n|$.

1° Soit g l'application de $]0, +\infty[$ vers **R** telle que : $g(t) = 1 - \frac{|a_1|}{t} - .... - \frac{|a_{n-1}|}{t^{n-1}} - \frac{|a_n|}{t^n}$.

a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b) Prouver que Q admet une seule racine dans $]0, +\infty[$; cette racine sera notée t_0.

2° Soit α élément de $]0, +\infty[$ tel que $Q(\alpha) \geq 0$. Etudier le signe de $Q(|z|)$.

En déduire que $|z| \leq t_0 \leq \alpha$.

3° En appliquant le résultat de la question précédente pour une valeur de α judicieusement choisie , retrouver l'inégalité établie à la question 3° Partie A et prouver qu'elle est stricte.

<u>Exercice 2</u>

R est l'ensemble des nombres réels, **Z** est l'ensemble des entiers relatifs et n un entier naturel.
Soit f une application continue de **R** vers **R**. On note (E_f) l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = f(x).$$

Dans cet exercice on appelle solution de (E_f) toute application de **R** vers **R** de classe C^2 vérifiant (E_f) sur **R**.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de solutions périodiques de (E_f).
On rappelle qu'une application φ de **R** vers **R** est périodique si et seulement s'il existe T élément de $\mathbf{R}^*$ tel que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x+T) = \varphi(x)$. On dit alors que φ est T-périodique ou que T est une période de φ.

<u>Partie A</u> Dans cette partie on établit quelques propriétés des applications périodiques.
Soit φ une application T-périodique de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

1° Montrer que si φ est continue sur $\mathbf{R}$ alors φ est bornée sur $\mathbf{R}$.

2° Montrer que si φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ alors φ' est T-périodique.

3° On considère l'ensemble P_φ suivant : $P_\varphi = \{t \in \mathbf{R}, \forall\, x \in \mathbf{R}, \varphi(x+t) = \varphi(x)\}$.

Montrer que P_φ est un sous groupe de $(\mathbf{R},+)$.

<u>Partie B</u> Etude des sous-groupes de $(\mathbf{R},+)$.
Soit G un sous groupe de $(\mathbf{R},+)$ non réduit à $\{0\}$.

1° Montrer que $G \cap \left]0,+\infty\right[$ n'est pas vide.

2° On pose $a = \inf\left(G \cap \left]0,+\infty\right[\right)$.

a) On considère le cas où $a > 0$.

i) Montrer qu'alors a appartient à G (on pourra faire un raisonnement par l'absurde, en montrant que si que a n'appartient pas à G il existe des éléments t_1 et t_2 de G tels que $a < t_2 < t_1 < 2a$ et en déduire une contradiction) .

ii) Etablir l'égalité $G = a\mathbf{Z}$.

b) On considère le cas où $a = 0$. Prouver que G est dense dans $\mathbf{R}$.

<u>Partie C</u> Etude du nombre de solutions périodiques de (E_f) dans trois cas simples.

1° Montrer que si (E_f) admet une solution T-périodique alors f est T- périodique.
Que peut-on conclure dans le cas où f n'est pas périodique ?

2° Résoudre l'équation différentielle (E_0) suivante : $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$.
Prouver que la fonction nulle est la seule solution périodique de (E_0).

3° Résoudre l'équation différentielle (E_c) suivante : $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \cos x$.
Prouver que (E_c) admet une seule solution périodique que l'on déterminera.

<u>Partie D</u> Dans cette partie on suppose que f est continue et de plus périodique.
On veut établir qu'alors (E_f) admet une seule solution périodique.

1° Dans cette question on prouve que (E_f) admet au moins une solution périodique.

a) Soit T une période de f et y une solution de (E_f). On considère l'application z de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par : $z(x) = y(x+T)$.

i) Prouver que z est solution de (E_f).

ii) Montrer que y est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$ et $y'(0) = y'(T)$.

b) Démontrer que (E_f) admet une solution périodique.

2° Dans cette question on prouve que (E_f) admet une seule solution périodique.

a) Cas où P_f est dense dans $\mathbf{R}$.

i) Montrer que f est constante (on pourra établir que : $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(0)$) .

ii) Conclure.

b) Cas où $P_f = a\mathbf{Z}$ avec a appartenant à $\mathbf{R}_+^*$.

Soient y_1 et y_2 des solutions périodiques de $\left(E_f\right)$, T_1 une période de y_1, T_2 une période de y_2.

i) Prouver que T_1 et T_2 sont des éléments de P_f.

ii) Montrer que y_1 et y_2 possèdent une période commune.

iii) En déduire que $y_1 = y_2$ (on utilisera la question 2° de la Partie C).

<u>Partie E</u> Détermination de la solution périodique de $\left(E_f\right)$ dans un cas particulier.
Les questions 1° et 2° qui suivent sont indépendantes du reste de l'exercice.

Dans cette partie *f* est l'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, 2π - périodique, telle que :

$$\forall\, x \in [-\pi,\pi],\ f(x) = x^2.$$

1° Calculer les coefficients de Fourier réels de *f*. Etudier la convergence de la série de Fourier de *f* (préciser le mode de convergence de cette série et sa somme).

2° Pour $n \geq 1$, on considère l'application u_n de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par :

$$u_n(x) = \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4+4)}\left((2-n^2)\cos(nx) - 2n\sin(nx)\right).$$

Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Soit S l'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par : $S(x) = \dfrac{\pi^2}{6} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Montrer que S est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$.

3° Prouver que S est l'unique solution périodique de $\left(E_f\right)$.

4° Pour $x \in [-\pi,\pi]$ calculer $S(x)$. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n(2-n^2)}{n^2(n^4+4)} = \frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi} + \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6}$.