Concours Centrale - Supélec 2007

Épreuve : MATHÉMATIQUES II **Filière PSI**

La représentation plane de figures tridimensionnelles suppose le choix d'une application p de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, grâce à laquelle une figure $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^3$ devient, dans $\mathbb{R}^2$, le *croquis* : $p(\mathscr{F})$. Ici, on fait le choix d'une application p **linéaire**, connue sous le nom de *perspective cavalière*. Toutefois, pour la commodité des calculs, on a préféré faire jouer aux vecteurs de la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$ des rôles différents de ceux qu'ils ont d'habitude dans ce type de perspective.

Dans tout le problème, les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leur structure euclidienne canonique orientée et pourront être considérés comme des espaces vectoriels réels de vecteurs-colonnes, ou des espaces affines réels de vecteurs-colonnes. Aussi bien pour ce qui concerne $\mathbb{R}^2$ que $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire canonique sera noté $<\ ,\ >$ et la norme euclidienne canonique sera notée $\|\cdot\|$.

On donne deux réels strictement positifs α et β et on considère l'application, notée p, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui au vecteur-colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} x - \alpha z \\ y - \beta z \end{pmatrix}$. Si $\mathscr{P}$ est une partie de $\mathbb{R}^3$, on dira qu'elle est *représentée en vraie grandeur* par p si, quels que soient M et M' dans $\mathscr{P}$, on a $\|\overrightarrow{p(M)p(M')}\| = \|\overrightarrow{MM'}\|$.

Partie I - Généralités

I.A -

I.A.1) Montrer que p est une application linéaire. Déterminer la matrice de p relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Déterminer le noyau et l'image de p.

Pour toute la suite du problème, on désigne par $\overrightarrow{\nu}$ le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

I.A.2) Représenter sur un même dessin les images par p des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Ce dessin donne une représentation en perspective de la base formée par ces trois vecteurs.

I.B - Interprétation géométrique de p

Pour cette seule question, on introduit l'endomorphisme $\overline{p}$ de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur-colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} x-\alpha z \\ y-\beta z \\ 0 \end{pmatrix}$.

Interpréter géométriquement p grâce à $\overline{p}$ (*on pourra former* $\overline{p}\circ\overline{p}$).

Est-il vrai que $\|p(X)\| \leqslant \|X\|$ pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^3$?

I.C -

I.C.1) Soit M_0 un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

On considère la droite affine $D = M_0 + \mathbb{R}\overrightarrow{u} = \{M_0 + \lambda\overrightarrow{u}\}$.

Montrer que $p(D) = p(M_0) + \mathbb{R}\,p(\overrightarrow{u})$.

I.C.2) Soit D une droite affine de $\mathbb{R}^3$. Montrer que son image par p est une droite affine ou est réduite à un point, en discutant selon un vecteur directeur de D.

I.C.3) Soit D et D' deux droites affines de $\mathbb{R}^3$ dont les images par p sont des droites affines de $\mathbb{R}^2$.

a) Si D et D' sont sécantes, montrer que leurs images par p le sont aussi. La réciproque est-elle vraie ?

b) Si D et D' sont parallèles, montrer que leurs images par p le sont aussi. La réciproque est-elle vraie ?

I.C.4) Soit Π un plan affine de $\mathbb{R}^3$. Discuter la nature de $p(\Pi)$ suivant $\overrightarrow{\nu}$ et Π.

I.D - Une propriété métrique de p

Soit un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$; on pose $q(X) = \|X\|^2 - \|p(X)\|^2$.

I.D.1) Montrer que l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $q(X) = 0$ est la réunion de deux plans Π_1 et Π_2 que l'on caractérisera par leurs équations cartésiennes.

En déduire que les plans affines parallèles à l'un ou l'autre de ces deux plans sont représentés en vraie grandeur par p.

I.D.2)

a) Montrer, en le déterminant, qu'il existe un unique endomorphisme autoadjoint u

de $\mathbb{R}^3$, tel que $q(X) = < u(X),\, X >$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$.

b) Déterminer le polynôme caractéristique χ_u de u puis le signe des valeurs propres non nulles de u.

I.E - Une généralisation

I.E.1) Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$; montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dont les deux premiers vecteurs soient dans P.

I.E.2) Soit u' un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^3$; on pose $q'(X) = < u'(X),\, X >$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, on suppose qu'il existe P, plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, tel que $q'(X) = 0$ pour tout $X \in P$ et, P étant supposé choisi, on choisit $\mathscr{B}$ comme dans la question I.E.1. Montrer que la matrice de u' relativement à $\mathscr{B}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

I.E.3) Si $(a,\, b) \neq (0,\, 0)$, montrer que l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $q'(X) = 0$ est la réunion de deux plans puis étudier le signe des valeurs propres non nulles de u'.

I.E.4) Discuter le rang de u' en fonction de $(a,\, b,\, c)$.

Dans les parties **II** et **III**, on se limite au cas où $\alpha = \cos\theta$ et $\beta = \sin\theta$ pour un $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ supposé choisi et, $R > 0$ étant donné, on considère la sphère S d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Partie II - L'image d'une sphère

Le but de cette partie est d'étudier l'image $p(S)$ de S par p.

II.A - Une inéquation définissant le domaine $p(S)$

II.A.1) Soit $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'image réciproque $p^{-1}(\{\xi\})$ est la droite affine D_ξ passant par le point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\nu}$. En conclure que

$$\xi \in p(S) \iff S \cap D_\xi \neq \emptyset$$

et que cela équivaut à dire que l'équation en t

$$(x + t\cos\theta)^2 + (y + t\sin\theta)^2 + t^2 - R^2 = 0$$

admet au moins une racine réelle.

II.A.2) En déduire que $p(S)$ est définie par l'inéquation $\Phi(x,\,y) \leqslant 2R^2$, où l'on a posé

$$\Phi(x,\,y) = 2(x^2+y^2) - (x\cos\theta + y\sin\theta)^2.$$

On désigne par $\mathscr{E}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ d'équation $\Phi(x,\,y) - 2R^2 = 0$.

II.A.3) On considère le repère affine $\mathscr{R}'$ déduit du repère canonique $\mathscr{R}$ de $\mathbb{R}^2$ par la rotation d'angle θ autour de l'origine.

a) Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x,y) dans $\mathscr{R}$ et de coordonnées (x',y') dans $\mathscr{R}'$.

Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

b) Montrer que $\mathscr{E}$ est une ellipse et donner son équation cartésienne dans $\mathscr{R}'$.

c) Indiquer les éléments remarquables de $\mathscr{E}$: axe focal, demi-longueur des axes et excentricité. Montrer que les foyers de $\mathscr{E}$ sont les points F et F' dont les coordonnées relatives à $\mathscr{R}'$ sont respectivement $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Déterminer une inéquation de $p(S)$ dans le repère $\mathscr{R}'$ et en déduire que $p(S)$ est le domaine borné limité par $\mathscr{E}$.

Représenter enfin $p(S)$ soigneusement dans le repère $\mathscr{R}'$.

II.B - Étude du contour apparent de S

II.B.1) Montrer, en le déterminant, que tout élément $\xi \in \mathscr{E}$ ne possède qu'un seul antécédent par p dans S.

Indication : On pourra déterminer $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\pi(\xi) = \xi + t_0\overrightarrow{\nu}$.

Cet antécédent sera noté $\pi(\xi)$ et on désignera par Σ l'ensemble des $\pi(\xi)$, lorsque ξ décrit $\mathscr{E}$.

II.B.2) Pour chaque $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{E}$, calculer $< \pi(\xi),\ \overrightarrow{\nu} >$ et en déduire que Σ est inclus dans P_0, le plan vectoriel orthogonal à $\overrightarrow{\nu}$.

II.B.3) Réciproquement, soit $X \in S$ tel que $< \overrightarrow{\nu},\ X >= 0$. Montrer que $p(X) \in \mathscr{E}$.

Indication : On pourra calculer $\Phi\big(p(X)\big)$ ou s'aider d'un dessin.

Conclure quant à la nature de Σ. La représentation de Σ par p est-elle en vraie grandeur ? Quelle conclusion peut-on en tirer en terme de représentation cavalière d'une sphère ?

II.C - De certaines symétries vectorielles laissant stable $\mathscr{E}$

II.C.1) Montrer que la restriction p_0 de p à P_0 est une bijection de P_0 sur $\mathbb{R}^2$.

On en notera p_1 la bijection réciproque.

II.C.2) Soit σ une application linéaire de P_0 sur lui-même, supposée involutive, c'est-à-dire vérifiant $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_{P_0}$.

a) Montrer que $s = p_0 \circ \sigma \circ p_1$ est une involution linéaire de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

b) Comment obtient-on les sous-espaces propres de s en fonction de ceux de σ ?

c) Montrer que s laisse stable $\mathscr{E}$ si, et seulement si, σ laisse stable Σ.

Partie III - Balayage de $p(S)$ par des cercles

III.A - Question préliminaire

On suppose donné un intervalle ouvert I non vide et un arc Γ de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que, pour un $t_0 \in I$, le vecteur-dérivée $\Gamma'(t_0)$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{\nu})$. Dans ces conditions, montrer que le point $p\left(\Gamma(t_0)\right)$ est régulier pour l'arc $p \circ \Gamma$, de I dans $\mathbb{R}^2$, et donner un vecteur directeur de la tangente à l'arc en ce point.

III.B -

III.B.1) Soit un réel $\delta \in [-\pi/2\,;\,\pi/2]$; montrer que l'intersection de S et du plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = R\sin\delta$ est le cercle C_δ paramétré par

$$\varphi \in \mathbb{R} \longmapsto M_\delta(\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\delta\cos\varphi \\ R\cos\delta\sin\varphi \\ R\sin\delta \end{pmatrix}$$

En donner le centre et le rayon.

III.B.2) Montrer que l'intersection de P_0 et de C_δ est non vide si, et seulement si, $|\delta\,| \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. Montrer plus précisément que cette intersection se compose alors de deux points lorsque $|\delta| < \dfrac{\pi}{4}$.

III.B.3) Soit $\delta \in [-\pi/4\,;\,\pi/4]$ et un point $M \in P_0 \cap C_\delta$. On choisit un réel φ_0 tel que $M = M_\delta(\varphi_0)$. Montrer que $M \in \Sigma$ puis que sont orthogonaux à $\overrightarrow{OM}$: le vecteur $\overrightarrow{\nu}$, le vecteur $\left[\dfrac{\mathrm{d}M_\delta}{\mathrm{d}\varphi}\right]_{\varphi=\varphi_0}$ ainsi que tout vecteur tangent en M à Σ.

III.B.4) Montrer que les $p(C_\delta)$, où δ décrit $[-\pi/2\,;\,\pi/2]$, sont des cercles et que $p(S)$ en est la réunion.

Déterminer le centre Ω_δ et le rayon R_δ du cercle $p(C_\delta)$.

En utilisant en particulier III.A et III.B.3, montrer que, lorsque $|\delta| < \dfrac{\pi}{4}$, le cercle $p(C_\delta)$ est tangent à $\mathscr{E}$ en deux points distincts. Étudier aussi le cas de $p(C_{\pi/4})$.

III.B.5) Lorsque $0 \leqslant \delta < \delta' \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, montrer que $p(C_{\delta'})$ et $p(C_\delta)$ sont sécants. Lorsque $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \delta < \delta' \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, montrer que $p(C_{\delta'})$ est intérieur à $p(C_\delta)$.

III.C - La récompense finale

Représenter sur un même dessin : $\mathscr{E}$, un cercle $p(C_\delta)$ avec $0 \leqslant \delta < \dfrac{\pi}{4}$, le cercle $p(C_{\pi/4})$ et un cercle $p(C_\delta)$ avec $\dfrac{\pi}{2} > \delta > \dfrac{\pi}{4}\cdot$

III.D -

Montrer qu'il existe une seconde famille de cercles inclus dans S dont les images par p soient des cercles et dont la réunion des images par p soit encore $p(S)$.

••• FIN •••