ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2007

PREMIERE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PC

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international
Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I -PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques qui vous sembleront pertinents. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations vectorielles : Vecteur $\rightarrow \vec{\mathbf{A}}$; norme du vecteur $\vec{\mathbf{A}} \rightarrow A$ (italique) ou $\left\|\vec{\mathbf{A}}\right\|$; vecteur unitaire $\rightarrow \hat{\mathbf{a}}$. Le vecteur unitaire correspondant à la coordonnée c est noté $\hat{\mathbf{c}}$; par exemple $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est le vecteur unitaire correspondant à la coordonnée θ en coordonnées cylindriques.

Dans toute l'épreuve, *exprimer* signifie donner l'expression littérale et *calculer* signifie donner la valeur numérique.

CORDE PESANTE ET VIBRANTE

Ce problème comporte cinq parties, largement indépendantes.

Rappel d'éléments de cours :

- Le point O étant quelconque, le centre de masse G d'un système de deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 vérifie $(m_1 + m_2)\overrightarrow{\mathbf{OG}} = m_1 \overrightarrow{\mathbf{OM}_1} + m_2 \overrightarrow{\mathbf{OM}_2}$.
- Le centre de masse G d'un système matériel filiforme dont la masse totale m_T est répartie le long d'une courbe (Γ) selon une densité linéique μ vérifie la relation $m_T \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \oint_{(\Gamma)} \mu(P)\overrightarrow{\mathbf{OP}}\,\mathrm{d}\ell_P$, où P est un point courant de (Γ) et $\mathrm{d}\ell_P$ la portion élémentaire de (Γ) centrée en P.
- Le théorème du centre de masse s'applique à (Γ) sous la forme $m_T\,\vec{\mathbf{a}}(G) = \vec{\mathbf{F}}_{ext}$, où $\vec{\mathbf{a}}(G)$ est l'accélération de G dans un référentiel galiléen et $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$ la résultante des forces extérieures.

Dans tout le problème, l'objet de l'étude est une corde AB de longueur L, parfaitement flexible et sans frottements internes, de section négligeable, homogène de masse totale m_T et de densité linéique uniforme μ. On l'étudie dans un plan vertical défini par le repère (O, x, z) (voir Fig. 1) dont la définition varie d'une partie à l'autre et qui est choisie en fonction de la configuration du problème étudié. On sera donc attentif à l'orientation de l'axe Oz.
On appelle G le centre de masse de la corde.

A : ÉTUDE CINÉMATIQUE D'UN MOUVEMENT BIDIRECTIONNEL

Première expérience

La corde AB est posée le long de l'axe Ox d'une table horizontale (Fig. 1). On soulève l'extrémité B avec une vitesse verticale constante $\vec{\mathbf{v}}_0$, la corde se déplaçant dans le plan vertical O(x, z), avec le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{z}}$ orienté vers le haut (Fig. 2). À l'instant t, l'ordonnée de B est donc $z = v_0 t$ $\left(v_0 = \left\|\vec{\mathbf{v}}_0\right\|\right)$. On admettra que tous les points de la corde qui sont en contact avec la table sont au repos et on conviendra que la corde est coudée en angle droit au point C de la corde situé sur la table, à l'aplomb du point B (ce qui revient à négliger la courbure en C).

On note G_1 la position du centre de masse G de la corde tant que cette dernière est sur la table et G_2 la position de G quand la corde est totalement verticale.

❑ **1** – Établir que, tant que la corde touche la table, l'ordonnée de son centre de masse G_1 est $Z(\mathrm{G}_1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{z^2}{L}$.

❑ **2** – En déduire que la composante verticale de l'accélération $\vec{\mathbf{a}}(\mathrm{G}_1)$ du centre de masse de la corde est constante et donner son expression en fonction de $\vec{\mathbf{v}}_0$ et de L.

❑ **3** – Lorsque la corde est entièrement verticale en contact avec la table (nouvel instant initial), on abaisse le point B avec la vitesse $-\vec{\mathbf{v}}_0$ jusqu'à ce que la corde se retrouve sur l'axe Ox de la table. Quelle est l'expression de l'accélération instantanée $\vec{\mathbf{a}}(\mathrm{G}_2)$ du centre de masse G_2 de la corde ? On ne se préoccupera pas de la manière dont la corde s'étale dans le plan de la table.

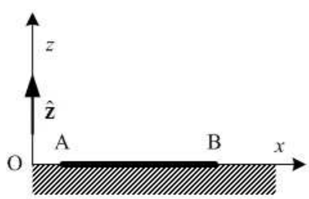

Fig. 1 – Corde posée sur la table

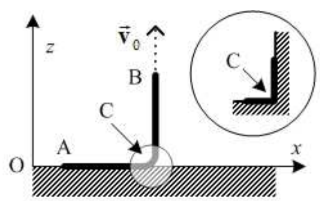

Fig. 2 – Corde tirée vers le haut

❑ **4** – Justifier sans calcul l'égalité des accélérations $\vec{\mathbf{a}}(\mathrm{G}_1)$ et $\vec{\mathbf{a}}(\mathrm{G}_2)$. Quelle est, selon ce modèle, l'accélération en C ?

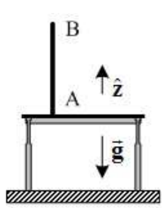

Fig. 3 – Chute libre.

Seconde expérience

La corde est verticale, en contact avec la table au point A. On la lâche sans vitesse initiale (Fig. 3). On admet que le mouvement de B est uniformément accéléré, d'accélération $\vec{\mathbf{g}} = -g\,\hat{\mathbf{z}}$ (accélération de la pesanteur). On admet toujours que les points de la corde sont au repos dès qu'ils touchent la table.

❑ **5** – Exprimer le temps de chute τ de la corde en fonction de L et de g. Calculer τ pour $L = 24\times10^{-1}\,\mathrm{m}$ et $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

❑ **6** – Déterminer l'accélération instantanée $\vec{\mathbf{a}}(\mathrm{G})$ du centre de masse en fonction de g, τ et du temps t.

❑ **7** – Représenter graphiquement l'évolution temporelle de $a(\mathrm{G})$ pendant la chute. Justifier qualitativement la présence d'un minimum de vitesse, $v_{\min}$ pendant la chute. Exprimer en fonction de τ l'instant t_0 où la vitesse du centre de masse passe par $v_{\min}$. Calculer t_0. Exprimer $v_{\min}$ en fonction de L et de τ. Calculer $v_{\min}$.

B : ÉTUDE DYNAMIQUE D'UNE CHUTE VERTICALE

La table est ici le plateau d'une balance électronique. On duplique la seconde expérience de la partie A : corde verticale, vitesse initiale nulle et mouvement de B uniformément accéléré.

❑ **8** – Exprimer le principe fondamental de la dynamique. On appelle « poids apparent » et on note $\vec{\mathbf{P}}_a$ la force dont le module est donné par l'indication de la balance. Justifier que pour l'usage habituel – statique - d'une balance, le poids apparent est égal au poids de l'objet pesé. Montrer que, pour la seconde expérience, le poids apparent s'exprime à l'instant t par $\vec{\mathbf{P}}_a = 3m(t)\vec{\mathbf{g}}$, où $m(t)$ est la masse de la corde posée sur la balance à l'instant t.

❑ **9** – À quel instant t_1 de la chute de la corde la balance indique-t-elle le poids total de la corde ? Comment expliquer l'égalité $t_1 = t_0$ (t_0 a été défini à la question 7) ?

❑ **10** – La corde est verticale, en contact en A avec le plateau de la balance. L'expérimentateur retient la corde avec une force $\vec{\mathbf{F}}(t)$ telle que la vitesse de B soit constante, égale à v_0. Montrer que $\vec{\mathbf{F}}(t) = -\mu(L - v_0 t)\vec{\mathbf{g}}$.

❑ **11** – En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la corde complète, montrer que, pendant toute la chute, le poids apparent de la corde est supérieur au poids réel de la partie de la corde effectivement posée sur le plateau. Exprimer la différence P_0 entre le poids apparent et le poids réel en fonction de μ et de v_0 et montrer qu'elle est constante.

C : CHUTE BIDIRECTIONNELLE DE LA CORDE

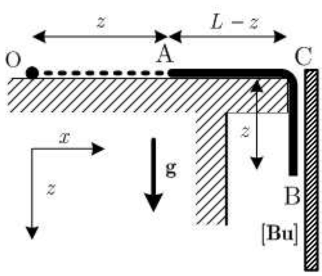

Fig. 4 : Chute d'une corde AB de longueur L dans le plan vertical (x, z). La longueur de la partie verticale CB est z (z>0). La corde occupe initialement le segment OC, avec OC = L. Le butoir [**Bu**] *garantit que le mouvement de la partie CB de la corde est bien vertical.*

La corde AB est à présent posée le long de l'axe O*x* de la table horizontale de la Fig. 1. Cette corde glisse sans frottement sur la table et l'on étudie sa chute dans le champ de pesanteur, d'intensité *g*. On se place dans le référentiel galiléen lié à la table et on utilise le repère (O, *x*, *z*), avec l'axe O*z* orienté vers le bas. La Fig. 4 précise quelques données non répétées dans cet énoncé. À l'instant initial, la corde est horizontale sur la table, sa vitesse est notée V_0. L'extrémité A est en O et l'extrémité B affleure le point C.

On pose $\alpha = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$.

❑ **12** – On note *z* la longueur de la partie de corde qui a quitté la table (Fig. 4). Que vaut, pendant la chute de la corde, la résultante *F* des forces s'exerçant sur l'ensemble de cette dernière ? Exprimer cette résultante en fonction de *z* et justifier que l'accélération d'un point quelconque de la corde est $\ddot{z}$. En déduire une équation différentielle en *z*.

❑ **13** – Établir la relation, valable pendant la chute de la partie verticale, $z(t) = \dfrac{V_0}{\alpha}\mathrm{sh}(\alpha t)$. Comparer cette loi horaire $z(t)$ avec celle qui est obtenue pour un point matériel M de même masse m_T lâché du point C avec la même vitesse initiale V_0.

❑ **14** – Déterminer les coordonnées du centre de masse $(\mathrm{G_H})$ de la partie horizontale AC et celles du centre de masse $(\mathrm{G_V})$ de la partie CB.

❑ **15** – Déterminer les coordonnées (X, Z) du centre de masse (G) de la corde et montrer que la trajectoire de ce centre de masse est une parabole. Quelle est la direction de l'axe de cette parabole ?

❑ **16** – Déterminer E_T, énergie cinétique de la corde en fonction de la fonction z et de ses dérivées.

❑ **17** – Déterminer de la même manière $E_C(\mathrm{P})$ énergie cinétique du point matériel P de masse m_T qui serait à chaque instant coïncidant avec G.

❑ **18** – Déterminer de la même manière l'énergie cinétique barycentrique associée au mouvement de translation de la partie horizontale de la corde, $E_C^{(H)}$; déterminer aussi l'énergie cinétique barycentrique associée au mouvement de translation de la partie verticale de la corde, $E_c^{(V)}$.

❑ **19** – Expliquer pourquoi la différence $E_T - \left[E_C^{(H)} + E_C^{(V)} + E_C(\mathrm{P})\right]$ n'est pas nulle. Que représente-t-elle ?

D : VIBRATIONS DE LA CORDE VERTICALE FIXÉE AUX DEUX EXTRÉMITÉS

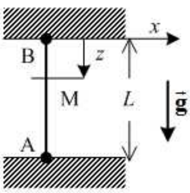

Fig. 5 – Corde tendue et fixée en ses extrémités.

La corde est à nouveau verticale, fixée en ses deux extrémités A et B (Fig. 5). L'axe des z est toujours orienté vers le bas et l'origine est maintenant à l'extrémité B : les points O et B coïncident. L'axe Ox est dans un plan horizontal. La tension de la corde au point A, $T(\mathrm{A})$ est très grande devant le poids de la corde : $T(\mathrm{A}) >> m_T g$. La position d'un point M de la corde est repérée par sa cote z dans un référentiel galiléen lié à B.

Position d'équilibre

❑ **20** – Définir ce qu'est la tension $T(\mathrm{M})$ de la corde en un point M. Exprimer $T(\mathrm{M})$ en fonction de $T(\mathrm{A})$, $m_T g$ et $\mu g z$. Montrer qu'à l'équilibre $T(\mathrm{M})$ est pratiquement constante le long de la corde.

Vibrations

❑ **21** – La corde vibre et le point M, de cote z à l'équilibre, se déplace transversalement. Ce déplacement, noté x, est fonction de z et du temps t. On note $\theta(z,t)$ l'angle que fait localement la corde avec l'axe vertical. Déterminer l'équation des ondes suivie par la fonction $x(z,t)$ en négligeant les termes du deuxième ordre en θ (approximation des petits mouvements). Exprimer la célérité c des ondes en fonction de $T(\mathrm{A})$ et de la masse linéique μ. Calculer c pour $\mu = 10^{-3}\ \mathrm{kg.m^{-1}}$ et $T(\mathrm{A}) = 1\ \mathrm{N}$.

❑ **22** – À l'instant initial, la forme de la corde est donnée par $x(z,0) = a\sin\left(\pi\dfrac{z}{L}\right)$, où a est une constante positive. Les vitesses initiales de tous les points de la corde sont nulles. Déterminer la fonction d'onde stationnaire $x(z,t)$ sous la forme $x(z,t) = X(z)\mathrm{A}(t)$.

❑ **23** – À l'instant initial, la corde est excitée selon deux modes propres :

$$x(z,0) = a\sin\left(\pi\frac{z}{L}\right) + b\sin\left(4\pi\frac{z}{L}\right),$$

où a et b sont des constantes positives. Les vitesses initiales de tous les points de la corde sont nulles. Déterminer avec le minimum de calculs la nouvelle fonction d'onde $x(z,t)$.

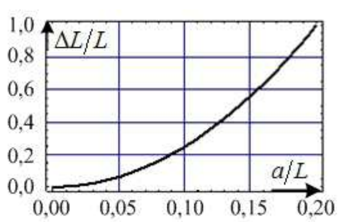

Fig. 6 – Allongement relatif de la corde, en %, en fonction de l'amplitude relative de la déformation.

❑ **24** – La Fig. 6 représente l'allongement relatif de la corde en fonction de l'amplitude initiale de la déformation. Commentez ce résultat, par exemple en discutant l'hypothèse (implicite !) que la masse linéique ne changeait pas au cours du mouvement.

E : VIBRATIONS DE LA CORDE FIXÉE À UNE EXTRÉMITÉ

Désormais (Fig. 7), l'extrémité B est fixe, l'extrémité A est libre.

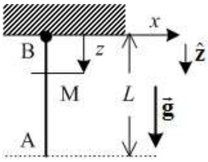

Fig.7 – Corde fixée en une extrémité et libre à l'autre.

Position d'équilibre

❑ **25** – La corde est en équilibre. Montrer que la tension de la corde au point M est donnée par $T(z) = \mu g (L - z)$.

Vibrations

❑ **26** – La corde vibre. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'élément $\mathrm{d}z$ de corde à la cote z, montrer que la fonction d'onde vérifie l'équation [1] :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L - z)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g\frac{\partial x}{\partial z}.$$

❑ **27** – Que devient l'équation d'onde si l'on tient compte de la force de frottement visqueux $\overrightarrow{\mathbf{df}} = -\alpha \dfrac{\partial x}{\partial t}\hat{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}z$ agissant sur l'élément de corde $\mathrm{d}z$, $\alpha > 0$ étant la constante de frottement ?

❑ **28** – On cherche une solution à l'équation d'onde au voisinage du point de fixation $(z << L)$. Montrer qu'une onde sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude complexe $\underline{x}(z,t) = \underline{x_0}\exp\left[j(\omega t - kz)\right]$, où k est une constante réelle ne peut se propager que pour une certaine valeur α_0 de la constante de frottement, que l'on exprimera en fonction de μ, g et L $\left(j^2 = -1\right)$.

❑ **29** – Donner, pour $\alpha = \alpha_0$, les expressions de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g de l'onde. Y a-t-il dispersion ?

❑ **30** – On néglige maintenant le terme de frottement et on cherche une solution à l'équation [1] de la question **26** dans la région $z << L$ sous la forme $\underline{x}(z,t) = \underline{a}\exp\left[j(\omega t - \underline{k}z)\right]$, avec $\underline{k} = k_1 + jk_2$ complexe (k_1 et k_2 étant réels). Exprimer k_2. En déduire que l'amplitude de l'onde augmente pendant la propagation. Le résultat est-il cohérent avec celui de la question **28** ?

❑ **31** – Établir alors et représenter graphiquement la relation de dispersion. Poser $\omega_0^2 = \dfrac{g}{4L}$ et montrer que la corde se comporte comme un filtre passe-haut.

❑ **32** – Déterminer la relation entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

Considérations énergétiques

❑ **33** – Montrer que la puissance mécanique (moyenne ou instantanée) qui traverse la corde à la cote z dans le sens des z croissants est proportionnelle à la tension $T(z)$ et au carré de l'amplitude du mouvement de la corde. En déduire que l'amplitude du mouvement augmente avec z dans cette portion de la corde.

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE