



---

**EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP**

---

**PHYSIQUE 2****Durée : 4 heures**

---

*Les calculatrices sont interdites.*

(Les données numériques sont choisies pour simplifier les calculs)

\* \* \*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

\* \* \*

**Partie A : OPTIQUE**

Ce problème d'optique comprend trois parties ; un premier chapitre « Définitions » introduit l'approximation de Gauss qui sera utilisée dans les deux chapitres suivants : « Etude de miroirs sphériques » et « Etude de lentilles minces ».

Les dix figures du problème d'optique sont en page 6/12.

**Les éléments (objets, images, rayons lumineux) seront tracés en traits pleins ( — ) s'ils sont réels et en tirets (----) s'ils sont virtuels.**

**I. DEFINITIONS****1. Systèmes optiques.**

- a. Qu'appelle-t-on système optique centré ?
- b. Qu'est-ce qu'un système optique catoptrique ?

**2. Stigmatisme.**

- a. Qu'appelle-t-on stigmatisme rigoureux pour un point A à travers un système optique ?
- b. Citez un système optique rigoureusement stigmatique pour tous les points de l'espace.

**3. Aplanétisme.**

- a. Soit  $(A, A')$  un couple de points conjugués, par un système optique centré (S). Le point A est situé sur l'axe optique. On considère un point B, voisin de A, tel que AB soit transverse, c'est-à-dire situé dans un plan de front. A quelle propriété doit satisfaire B', image de B à travers (S), pour conduire à un aplanétisme rigoureux du couple  $(A, A')$  ?
- b. Citez un système optique rigoureusement aplanétique pour tous les points de l'espace.

**4. Approximation de Gauss.**

- a. Énoncer les conditions qui permettent de réaliser l'approximation de Gauss.
- b. Quelle conséquence l'approximation de Gauss a-t-elle sur le stigmatisme ?

**II. ETUDE DE MIROIRS SPHERIQUES**

Un miroir sphérique est une calotte sphérique réfléchissante sur l'une de ses faces. Le centre de la sphère est noté C et le point d'intersection S de la calotte avec l'axe optique est appelé sommet du miroir.

**Les miroirs sphériques étudiés seront utilisés dans l'approximation de Gauss.**

**1. Caractère convergent ou divergent d'un miroir sphérique.**

- a. Un miroir convexe est-il un système optique convergent ou divergent ?
- b. Parmi les miroirs sphériques ( $m_1$ ) et ( $m_2$ ) représentés (Figure 1), lequel est divergent ?
- c. En plaçant notre œil loin d'un miroir sphérique ( $m_3$ ), on constate que l'image de notre œil est droite et réduite. Le miroir ( $m_3$ ) est-il convergent ou divergent ?

**2. Relations de conjugaison et de grandissement.**

On cherche à déterminer la position de l'image  $A'$  d'un point A situé sur l'axe optique.

**a. Relation de conjugaison de Descartes.**

On considère un rayon incident AI issu de A qui se réfléchit en I (Figure 2).

- a.1. Déterminer les relations liant les angles  $\alpha$ ,  $\alpha'$  et  $\beta$  aux grandeurs algébriques  $\overline{SA}$ ,  $\overline{SA'}$ ,  $\overline{SC}$  et  $\overline{HI}$ , dans l'approximation de Gauss.
- a.2. Exprimer la relation entre les angles  $\alpha$ ,  $\alpha'$  et  $\beta$ .
- a.3. En déduire la relation de conjugaison au sommet du miroir :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{k_1}{\overline{SC}} \quad \text{où } k_1 \text{ est un facteur que l'on déterminera.}$$

- a.4. Donner les expressions des distances focales image  $f' = \overline{SF'}$  et objet  $f = \overline{SF}$  du miroir sphérique en fonction de  $\overline{SC}$ .

**b. Relation de conjugaison de Newton.**

On représente le miroir sphérique de centre C et de sommet S en dilatant l'échelle dans les directions transverses (Figure 3).

- b.1. Reproduire la Figure 3 en indiquant les foyers principaux objet F et image F' et construire l'image A'B' d'un objet AB transverse.
- b.2. En considérant les propriétés des triangles semblables, montrer que nous obtenons la relation de conjugaison de Newton :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f \cdot f'$$

**c. Relation de conjugaison : origine au centre.**

- c.1. En prenant le centre C comme origine, montrer que  $\overline{FA}$  et  $\overline{F'A'}$  peuvent s'exprimer en fonction de  $\overline{CA}$ ,  $\overline{CA'}$  et  $\overline{CS}$ .
- c.2. Déduire de la relation de Newton, la formule de conjugaison avec origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{k_2}{\overline{CS}} \quad \text{où } k_2 \text{ est un facteur que l'on déterminera.}$$

**d. Grandissement.**

Si  $\overline{AB}$  a pour image  $\overline{A'B'}$ , nous représenterons le grandissement transversal par le rapport algébrique :  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ . Exprimer ce grandissement  $\gamma$  :

- d.1. - en fonction de  $\overline{SA}$  et  $\overline{SA'}$ .
- d.2. - en fonction de  $\overline{FA}$ ,  $\overline{FA'}$  et  $\overline{FS}$ .
- d.3. - en fonction de  $\overline{CA}$  et  $\overline{CA'}$ .

**3. Correspondance objet-image pour des miroirs concave et convexe.****a. Construction géométrique de l'image A'B' d'un objet AB transverse.**

Construire l'image A'B' à l'aide de deux rayons issus du point B pour les miroirs suivants :

- a.1. ( $M_1$ ), de centre  $C_1$  et de sommet  $S_1$  (Figure 4).
- a.2. ( $M_2$ ), de centre  $C_2$  et de sommet  $S_2$  (Figure 5).

**b. Position de l'image A'B' et grandissement transversal.**

On définira le rayon de courbure d'un miroir ( $M_x$ ) par :  $R_x = \overline{S_x C_x}$

- b.1. Le miroir ( $M_3$ ) est concave, de rayon de courbure  $R_3$  tel que  $|R_3| = 20$  cm. L'objet AB est situé au milieu de  $F_3 S_3$  ( $F_3$ : Foyer objet ;  $S_3$ : Sommet). Calculer  $\overline{S_3 A'}$  et en déduire le grandissement transversal de l'objet.
- b.2. Le miroir ( $M_4$ ) est convexe, de rayon de courbure  $R_4$  tel que  $|R_4| = 40$  cm. L'objet AB est situé après  $S_4$  tel que  $\overline{S_4 A} = 50$  cm. Calculer  $\overline{C_4 A'}$  et en déduire le grandissement transversal de l'objet.

**4. Système réflecteur : le télescope de Cassegrain**

Données numériques : Diamètre de la Lune :  $D_L = 3\,456$  km  
Distance Terre – Lune :  $D_{TL} = 384\,000$  km

- a. L'axe optique d'un miroir sphérique concave ( $\mathcal{M}$ ), de sommet S, de centre C et de rayon  $R = \overline{SC}$  est dirigé vers le centre de la Lune.
  - a.1. Déterminer la position de l'image A'B' de la Lune après réflexion sur ( $\mathcal{M}$ ).
  - a.2. Calculer le diamètre apparent  $\varepsilon$  du disque lunaire.
  - a.3. En déduire la dimension de l'image A'B' pour  $|R| = 60$  cm.
- b. On réalise l'objectif d'un télescope de type Cassegrain en associant deux miroirs sphériques (Figure 6) :
  - un miroir sphérique concave ( $\mathcal{M}_1$ ), appelé miroir primaire, de sommet  $S_1$ , de centre  $C_1$ , de foyer  $F_1$  et de rayon  $R_1 = \overline{S_1 C_1}$ .
  - un miroir sphérique convexe ( $\mathcal{M}_2$ ), appelé miroir secondaire, de sommet  $S_2$ , de centre  $C_2$ , de foyer  $F_2$  et de rayon  $R_2 = \overline{S_2 C_2}$ .

Le miroir ( $\mathcal{M}_1$ ) comprend une petite ouverture centrée en  $S_1$  pour permettre le passage de la lumière après réflexion sur ( $\mathcal{M}_1$ ) puis sur ( $\mathcal{M}_2$ ).

Le miroir ( $\mathcal{M}_2$ ) est de petite dimension, afin de ne pas obstruer le passage de la lumière tombant sur le miroir primaire.

  - b.1. Où doit se situer l'image A'B' de la Lune après réflexion sur ( $\mathcal{M}_1$ ), afin que le miroir sphérique convexe ( $\mathcal{M}_2$ ), caractérisé par  $S_2$ ,  $C_2$  et  $F_2$ , en donne une image réelle A''B'' ?

- b.2.** Déterminer la position du foyer image  $F'$ , de l'association des miroirs ( $\mathcal{M}_1$ ) et ( $\mathcal{M}_2$ ), en exprimant  $\overline{S_2F'}$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $d = \overline{S_2S_1}$ .
- b.3.** Exprimer le grandissement transversal  $\gamma$  de l'objet  $A'B'$  à travers le miroir ( $\mathcal{M}_2$ ) en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $d = \overline{S_2S_1}$ .
- b.4.** Calculer  $\overline{S_2F'}$ ,  $\gamma$  et la dimension finale de l'image  $A''B''$  pour :  $|R_1| = 60$  cm ;  $|R_2| = 40$  cm et  $|d| = 18$  cm.
- b.5.** Quelle serait la distance focale image  $f_L$  d'une unique lentille mince qui donnerait de la Lune la même image  $A''B''$  ? Commenter.

### III. ETUDE DE LENTILLES MINCES

Les lentilles minces étudiées seront utilisées dans l'approximation de Gauss.

#### 1. Caractère convergent ou divergent d'une lentille mince.

##### a. Formes des lentilles sphériques minces.

Parmi les lentilles ( $l_1$ ) à ( $l_6$ ) représentées sur la Figure 7, indiquer dans cet ordre : la lentille biconcave, la lentille ménisque convergent et la lentille plan concave.

##### b. Observation d'un objet éloigné.

On vise un objet placé à grande distance en plaçant l'œil loin d'une lentille ( $l_7$ ). Nous voyons une image inversée de l'objet. La lentille ( $l_7$ ) est-elle convergente ou divergente ? Justifier votre réponse.

##### c. Déplacement transversal.

On place un objet réel de telle sorte que son image, vue à travers une lentille ( $l_8$ ), soit droite. En déplaçant ( $l_8$ ) transversalement à son axe optique, on constate que l'image de l'objet se déplace dans le même sens que la lentille. La lentille ( $l_8$ ) est-elle convergente ou divergente ? Justifier votre réponse.

#### 2. Relations de conjugaison et de grandissement.

##### a. Relation de conjugaison de Newton.

Reproduire et compléter le tracé des rayons BI et BFJ de la Figure 8 pour l'obtention de l'image  $A'B'$  de AB. (Foyer objet : F)

Exprimer le grandissement transversal  $\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$  respectivement en fonction de  $\overline{FA}$  et  $\overline{OF}$

puis de  $\overline{F'A'}$  et  $\overline{OF'}$ . (Foyer image : F')

En déduire la relation de conjugaison de Newton.

##### b. Relation de conjugaison de Descartes.

En prenant le centre O comme origine, montrer que la relation de conjugaison de Newton conduit, après transformation (relation de Chasles) de  $\overline{FA}$  et  $\overline{F'A'}$ , à une relation entre les grandeurs algébriques  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OA'}$  et  $\overline{OF'}$  dite relation de conjugaison de Descartes.

Exprimer le grandissement  $\Gamma$  en fonction de  $\overline{OA}$  et  $\overline{OA'}$ .

#### 3. Correspondance objet-image pour des lentilles minces convergente et divergente.

##### a. Construction géométrique de l'image $A'B'$ d'un objet AB transverse.

Reproduire et construire l'image  $A'B'$  de AB à l'aide de deux rayons issus du point B pour les lentilles minces suivantes :

- a.1. Lentille ( $L_1$ ), de centre optique  $O_1$  et de foyers objet  $F_1$  et image  $F'_1$  (Figure 9).
- a.2. Lentille ( $L_2$ ), de centre optique  $O_2$  et de foyers objet  $F_2$  et image  $F'_2$  (Figure 10).

**b. Position de l'image A'B' et grandissement transversal.**

Donner la nature et la position de l'image A'B' d'un objet AB ainsi que le grandissement transversal  $\Gamma$  pour les lentilles ( $L_3$ ) et ( $L_4$ ) suivantes :

- b.1. La lentille ( $L_3$ ) est convergente, de distance focale image  $+30$  cm. Le positionnement de AB est tel que  $\overline{O_3A} = 15$  cm. La position de A' sera donnée par la valeur de  $\overline{F'_3A'}$ .
- b.2. La lentille ( $L_4$ ) est divergente, de distance focale image  $-30$  cm. Le positionnement de AB est tel que  $\overline{AF'_4} = 20$  cm. La position de A' sera donnée par la valeur de  $\overline{O_4A'}$ .

**4. Système réfracteur : la lunette de Galilée.**

Une lunette de Galilée comprend :

- un objectif assimilable à une lentille mince ( $\mathcal{L}_1$ ), de centre  $O_1$  et de vergence  $V_1 = 5$  dioptries,
- un oculaire assimilable à une lentille mince ( $\mathcal{L}_2$ ), de centre  $O_2$  et de vergence  $V_2 = -20$  dioptries.

- a. Déterminer la nature et les valeurs des distances focales images  $f'_1$  et  $f'_2$  des lentilles.
- b. La lunette est du type « afocal » :
  - b.1. Préciser la position relative des deux lentilles, la valeur de la distance  $d = \overline{O_1O_2}$  et l'intérêt d'une lunette afocale.
  - b.2. Dessiner, dans les conditions de Gauss, la marche d'un rayon lumineux incident, issu d'un point objet à l'infini, faisant un angle  $\theta$  avec l'axe optique et émergeant sous l'angle  $\theta'$ .
  - b.3. En déduire le grossissement (ou grandissement angulaire) de cette lunette en fonction des angles  $\theta$  et  $\theta'$ , puis des distances focales  $f'_1$  et  $f'_2$ . Valeur du grossissement ?
- c. Un astronome amateur utilise cette lunette, normalement adaptée à la vision d'objets terrestres, pour observer deux cratères lunaires : Copernic (diamètre : 96 km) et Clavius (diamètre : 240 km). **Rappel** : Distance Terre – Lune :  $D_{TL} = 384\,000$  km.
  - c.1. L'astronome voit-il ces deux cratères lunaires :
    - à l'œil nu ? (Acuité visuelle :  $3 \times 10^{-4}$  rad)
    - à l'aide de cette lunette ? Justifier vos réponses.
  - c.2. La planète Vénus, de 12 150 km de diamètre, occultera Jupiter (de diamètre 145 800 km) le 22 novembre 2065.  
Notre astronome amateur (qui sera certainement confirmé), pourra-t-il observer à l'œil nu ou à l'aide de sa lunette le disque jovien occulté par Vénus ? Dans cette configuration, la distance Terre-Vénus sera  $D_{TV} = 45 \times 10^6$  km.

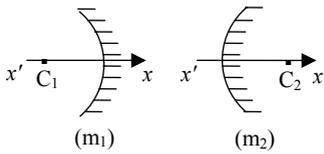


Figure 1

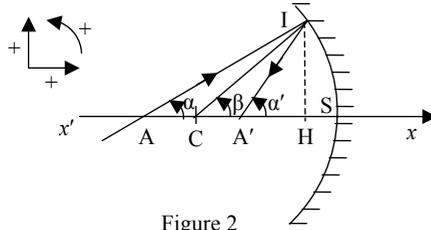


Figure 2

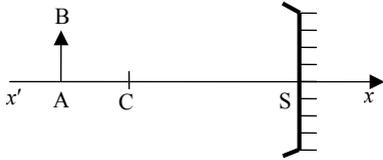


Figure 3

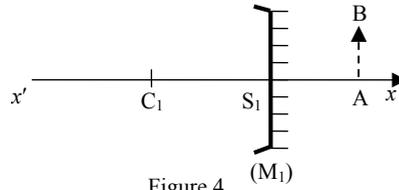


Figure 4

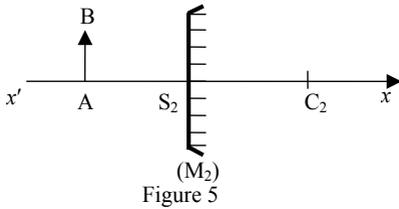


Figure 5

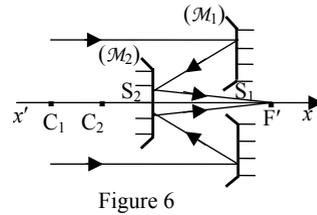


Figure 6

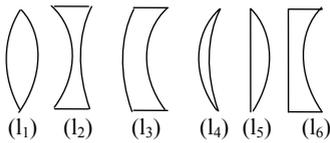


Figure 7

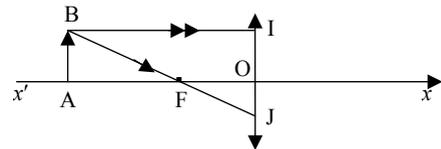


Figure 8

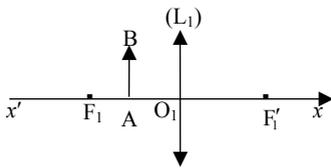


Figure 9

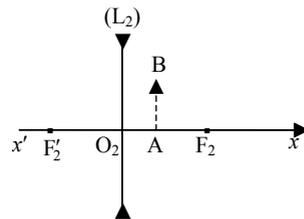


Figure 10

## Partie B : ELECTROMAGNETISME

Le problème d'électromagnétisme comprend quatre parties indépendantes : des généralités sur les conducteurs, condensateurs et capacités et trois applications des condensateurs (système Terre-ionosphère et circuit RC) et conducteurs (câble coaxial).

Les six figures du problème d'électromagnétisme sont en page 11/12.  
Des valeurs numériques des fonctions  $\lg x$  et  $\tan \alpha$  sont en page 12/12.

Les grandeurs scalaires sont représentées par :  $a, b, AB, CD$

Les grandeurs vectorielles sont en caractères gras :  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{AB}, \mathbf{CD}$

En notation complexe ces grandeurs sont soulignées :  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{AB}, \underline{CD}, \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{AB}}, \underline{\mathbf{CD}}$

Notation des produits scalaire ( $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD}$ ) et vectoriel ( $\mathbf{AB} \times \mathbf{CD}$ ) de deux vecteurs.

$\epsilon_0$  : désigne la permittivité du vide.

$\lg x$  : désigne le logarithme décimal de  $x$ .

### I. CONDUCTEURS – CONDENSATEURS – CAPACITES

#### 1. Conducteurs – Propriétés.

a. Quelle distinction fait-on entre un conducteur métallique et un isolant ?

Parmi les types de matériaux suivants : plastique, métal, corps humain, verre, eau pure et eau du robinet, quels sont ceux que l'on classe parmi les conducteurs électriques ?

b. Qu'appelle-t-on conducteur en équilibre électrostatique ?

Définir à l'intérieur de ce conducteur les propriétés de :  $\mathbf{E}_i$  (champ électrostatique),  $\rho_i$  (densité volumique de charges) et  $V_i$  (potentiel électrostatique).

Si l'on apporte des charges excédentaires à ce conducteur en équilibre électrostatique, où vont-elles se répartir ?

c. On considère un conducteur métallique creux, de surface ( $S_{\text{ext}}$ ), en équilibre électrostatique dans lequel une cavité, de surface ( $S_c$ ), ne contient pas de charges excédentaires (Figure 1).

Définir à l'intérieur de la cavité les propriétés de :  $\mathbf{E}_c$  (champ électrostatique),  $\rho_c$  (densité volumique de charges),  $\sigma_c$  (densité surfacique de charges sur ( $S_c$ )) et  $V_c$  (potentiel électrostatique).

Où vont se placer les charges excédentaires que l'on dépose sur ce conducteur métallique creux en équilibre électrostatique ?

d. Théorème de Coulomb : énoncé et formulation.

#### 2. Conducteurs – Capacités.

Soit  $V$  le potentiel d'un conducteur en équilibre,  $Q$  la charge portée par sa surface et  $\sigma$  la densité surfacique de charge.

a. Exprimer la capacité  $C$  du conducteur en fonction de  $V$  et de  $Q$ .

b. Calculer les capacités des conducteurs (en équilibre électrostatique) suivants :

**b.1.** *Conducteur plan* : on considère un disque conducteur de centre  $O_1$ , de rayon  $R_1$ , portant une charge surfacique  $\sigma_1$ , répartie uniformément sur une face.

Calculer, en fonction de  $\sigma_1$ ,  $R_1$  et  $\epsilon_0$ , la charge  $Q_1$  et le potentiel  $V_1$  de ce conducteur et en déduire  $C_1$ .

**b.2.** *Conducteur cylindrique* : on considère un cylindre conducteur de rayon  $R_2$ , de longueur  $l$ , portant une charge surfacique  $\sigma_2$ , répartie uniformément sur la surface latérale.

Calculer, en fonction de  $\sigma_2$ ,  $R_2$ ,  $l$  et  $\epsilon_0$ , la charge  $Q_2$  et le potentiel  $V_2$  de ce conducteur et en déduire  $C_2$ .

- b.3. Conducteur sphérique :** on considère une sphère conductrice de centre  $O_3$ , de rayon  $R_3$ , portant une charge surfacique  $\sigma_3$ , répartie uniformément sur la sphère.

Calculer, en fonction de  $\sigma_3$ ,  $R_3$  et  $\epsilon_0$ , la charge  $Q_3$  et le potentiel  $V_3$  de ce conducteur et en déduire  $C_3$ .

### 3. Condensateurs – Propriétés.

- a. Qu'appelle-t-on condensateur électrique ?
- b. Parmi les condensateurs (plans, cylindriques et sphériques), citer trois types de condensateurs usuels.
- c. Énoncer le théorème de Gauss, puis exprimer sa formulation mathématique précise.

### 4. Condensateurs – Capacités.

Soit un conducteur creux ( $B$ ) entourant totalement un conducteur ( $A$ ) (Figure 2).

Le conducteur interne ( $A$ ), au potentiel  $V_A$ , porte sur sa surface extérieure la charge  $Q_A$ . Le conducteur externe ( $B$ ), au potentiel  $V_B < V_A$ , porte sur sa surface intérieure la charge  $Q_{Bi}$  et sur sa surface extérieure la charge  $Q_{Be}$ .

- a. À l'équilibre électrostatique de ces deux conducteurs, quelle est la relation entre les charges  $Q_A$  et  $Q_{Bi}$  ? Justifier votre réponse.
- b. En considérant ce système de deux conducteurs comme un condensateur, définir la charge  $Q$  de ce condensateur. En déduire la capacité  $C$  en fonction de  $Q$  et des potentiels  $V_A$  et  $V_B$ .

c. Détermination des capacités des condensateurs suivants :

- c.1. Condensateur plan :** donner, sans démonstration, l'expression de la capacité  $C_1$  d'un condensateur plan, supposé idéal, en fonction de  $e$  (écartement des deux armatures parallèles),  $S$  (aire des armatures) et  $\epsilon_0$ .

*Application numérique :* le condensateur plan est doté de plaques circulaires de rayon 6 cm qui se trouvent à 2,5 mm l'une de l'autre. Calculer sa capacité et la charge qui apparaîtra sur les plaques si on leur applique une différence de potentiel de 150 V.

- c.2. Condensateur cylindrique :** soit un condensateur constitué de deux armatures cylindriques concentriques de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$  et de hauteur  $h$ . L'armature de rayon  $R_1$  et de hauteur  $h$  porte la charge  $Q_1$ .

- Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, le champ électrostatique entre les armatures  $\mathbf{E}$ .

- Exprimer la différence de potentiel  $\Delta V = V(R_1) - V(R_2)$  et en déduire la capacité  $C_2$  du condensateur cylindrique en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $h$  et  $\epsilon_0$ .

- Examiner le cas où  $R_2 = R_1 + e$  avec  $e \ll R_1$ .

- c.3. Condensateur sphérique :** un condensateur comprend deux armatures sphériques concentriques de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ . L'armature interne de rayon  $R_1$  possède une charge  $Q_1$ .

- Déterminer, en utilisant l'équation de Laplace, le potentiel électrostatique  $V(r)$  entre les armatures et en déduire le champ électrostatique  $E(r)$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $V(R_1)$ ,  $V(R_2)$  et  $r$ .

Le laplacien d'une fonction scalaire en coordonnées sphériques a pour expression :

$$\Delta f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

- En déduire la capacité  $C_3$  du condensateur sphérique en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $\epsilon_0$ .

- Examiner le cas où  $R_2 = R_1 + e$  avec  $e \ll R_1$ .

## II. CONDENSATEUR SPHERIQUE : Système Terre-ionosphère

On représente l'ensemble Terre-ionosphère comme un volumineux condensateur sphérique qui peut être modélisé par le schéma de la Figure 3. La Terre, de rayon  $R$ , se comporte comme un conducteur parfait de potentiel nul et porte une charge négative  $-Q$  ( $Q > 0$ ) uniformément répartie sur sa surface, tandis que l'ionosphère représentée par une surface équipotentielle sphérique de rayon  $R+z_0$ , de potentiel  $V$  possède une charge totale  $+Q$ . On suppose que l'atmosphère a la permittivité du vide.

1. Exprimer le champ électrostatique  $E(z)$  à l'altitude  $z$  ( $0 < z < z_0$ ) en fonction de  $Q$ ,  $R$ ,  $z$  et  $\varepsilon_0$ . (Vecteurs unitaires en coordonnées sphériques :  $e_r$ ,  $e_\theta$ ,  $e_\phi$ ).
2. En déduire le potentiel  $V$ , puis la capacité  $C$  du système en fonction de  $R$ ,  $z_0$  et  $\varepsilon_0$ .
3. Des mesures à l'altitude  $z_0 = 60$  km ont permis d'évaluer le potentiel à environ 360 kV. Justifier que dans ces conditions le système se comporte comme un condensateur plan. Calculer la capacité  $C$  et l'énergie électrostatique  $W_{el}$  du système, ainsi que la valeur du champ  $E$  au niveau du sol, le rayon terrestre valant 6 000 km. (On prendra  $(1/\pi) \approx 0,32$ ).
4. Donner la valeur de la densité surfacique de charge  $\sigma$  à la surface de la Terre et en déduire sa charge totale  $-Q$ .
5. Lors d'un orage, la tension passe à  $V_1 = 10^8$  V pour le système formé par le sol et la base des nuages d'altitude  $z_1 = 1$  km. Déterminer les nouvelles valeurs  $\sigma_1$  et  $E_1$ . Sachant qu'en temps normal, l'atmosphère est partiellement ionisée et parcourue par de faibles courants électriques verticaux dont l'effet principal est de décharger le système Terre-atmosphère, quelle est l'incidence d'un orage sur ces transferts de charges ?

## III. CONDENSATEUR PLAN : Circuit RC

### 1. Circuit RC : Filtre du 1<sup>er</sup> ordre.

On considère le filtre RC représenté en Figure 4. Un générateur délivre une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et de tension efficace  $U_e$ . On suppose l'impédance de charge suffisamment élevée pour pouvoir négliger le courant de sortie ( $I = 0$ ).

a. Prévoir la nature du filtre en examinant les comportements limites suivant la pulsation.

b. Calculer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{U_s}{U_e}$  de ce filtre et la mettre sous une forme canonique en introduisant la variable réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_c}$  où  $\omega_c$  est une pulsation caractéristique que l'on déterminera.

c. Tracer les diagrammes de Bode relatifs au gain et à la phase, respectivement

$G_{dB}(\lg x)$  et  $\varphi(\lg x)$  sur l'intervalle  $\left[ \frac{1}{100}, 100 \right]$ . On précisera les asymptotes.

### 2. Circuit RC : Filtre du 2<sup>ème</sup> ordre.

On considère le filtre représenté sur la Figure 5. Un générateur fournit à l'entrée une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$  de valeur efficace  $U_e'$ .

a. Déterminer la nature de ce filtre par l'analyse des comportements limites.

b. Calculer la fonction de transfert  $\underline{H}'(j\omega)$  et l'exprimer en fonction de  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  où  $\omega_0 = 1/RC$ .

- c. Tracer les diagrammes de Bode  $G_{\text{dB}}(\lg x)$  et  $\varphi(\lg x)$  en précisant les asymptotes sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{100}, 100\right]$ .
- d. Déterminer les pulsations de coupure à 3 dB,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ( $\omega_1 < \omega_2$ ) et en déduire la bande passante du filtre en fonction de  $RC$ .

#### IV. CONDUCTEURS CYLINDRIQUES : Câble coaxial

Une ligne électrique, supposée de longueur infinie, est constituée par un câble coaxial comprenant deux surfaces cylindriques, conductrices, de résistance négligeable, de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ . L'espace entre les deux conducteurs est vide.

Le câble est traversé par un courant alternatif d'expression en notation complexe  $\underline{I}(z,t) = \underline{I}_m(z) \exp(j\omega t)$  dans le sens de  $Oz$  pour le conducteur interne et dans le sens opposé pour le conducteur externe (Figure 6). On suppose que les champs électrique  $\underline{E}$  et magnétique  $\underline{B}$  en tout point M dans l'espace  $R_1 < \rho < R_2$  sont de la forme :

$$\underline{E} = \underline{E}_0(\rho, z) \exp(j\omega t) \quad \text{et} \quad \underline{B} = \underline{B}_0(\rho, z) \exp(j\omega t)$$

et que le champ électrique  $\underline{E}$  est radial :  $\underline{E} = E_0(\rho, z) \exp(j\omega t) \underline{e}_\rho$

**Donnée :** Au point M ( $\rho, \theta, z$ ) de coordonnées cylindriques, la fonction vectorielle

$\underline{G}(\mathbf{M}) = G_\rho \underline{e}_\rho + G_\theta \underline{e}_\theta + G_z \underline{e}_z$  admet pour rotationnel :

$$\text{rot } \underline{G} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial G_z}{\partial \theta} - \frac{\partial G_\theta}{\partial z} \right) \underline{e}_\rho + \left( \frac{\partial G_\rho}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial \rho} \right) \underline{e}_\theta + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho G_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial G_\rho}{\partial \theta} \right) \underline{e}_z$$

- Par application de l'équation de Maxwell-Faraday sous forme locale au point M entre les deux conducteurs, montrer que le champ  $\underline{B}$  est orthoradial. (On négligera toute composante continue de ce champ).
- En appliquant l'équation de Maxwell-Ampère sous forme intégrale (théorème d'Ampère généralisé) à un cercle d'axe  $Oz$ , de rayon  $\rho$  (cercle passant par M), déterminer en fonction de  $\rho$  et du courant  $\underline{I}_m(z) \exp(j\omega t)$ , le champ magnétique  $\underline{B}$ .
- Etablir une relation entre  $\frac{\partial B_\theta}{\partial z}$  et  $\frac{\partial E_\rho}{\partial t}$  en appliquant de nouveau l'équation de Maxwell-Ampère mais sous forme locale au point M, à la distance  $\rho$  de l'axe  $Oz$ . En déduire l'expression du champ électrique  $\underline{E}$  en fonction de  $\rho$  et du courant  $\underline{I}_m(z) \exp(j\omega t)$ . (On n'introduira pas de champ électrique constant).
- En déduire que la fonction  $\underline{I}_m(z)$  satisfait à une équation différentielle dont une solution est  $\underline{I}_m(z) = I_0 \exp(-jkz)$  et donner l'expression de  $k$ . Montrer que cette solution correspond à une « onde de courant » qui se propage parallèlement à l'axe  $Oz$ , avec un sens et une vitesse de phase que l'on précisera.
- Déterminer, à partir de l'expression de  $\underline{I}_m(z)$ , les champs  $\underline{E}$  et  $\underline{B}$  en notation réelle ( $\underline{E}, \underline{B}$ ), et préciser les caractéristiques de cette onde électromagnétique existant entre les conducteurs.
- Définir, en notation réelle, le vecteur de Poynting  $\underline{S}$  et sa valeur moyenne temporelle  $\langle \underline{S} \rangle$ . En déduire le flux de  $\langle \underline{S} \rangle$  à travers la couronne circulaire comprise entre les circonférences de rayons  $R_1$  et  $R_2$ .

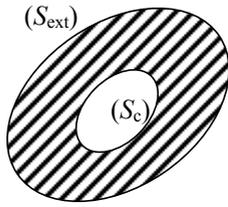


Figure 1

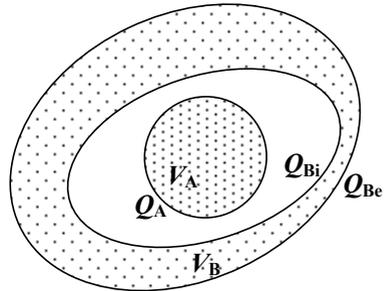


Figure 2

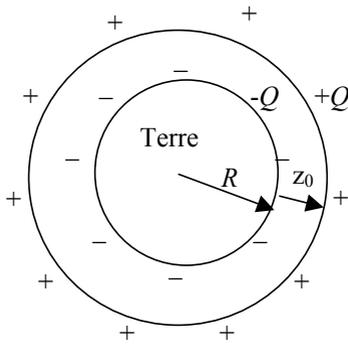


Figure 3

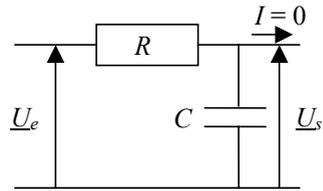


Figure 4

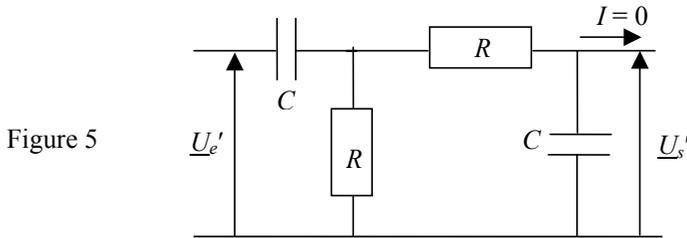


Figure 5

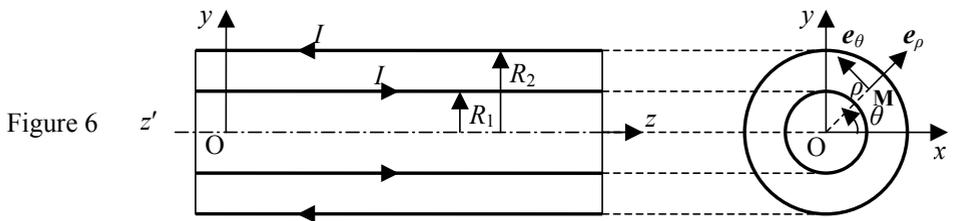


Figure 6

Valeurs numériques de  $\lg x$  et de  $\tan \alpha$  $\lg x$  : logarithme décimal de  $x$ 

$x$	1,5	2	2,5	3
$\lg x$	$\approx 0,176$	$\approx 0,301$	$\approx 0,398$	$\approx 0,477$

$x$	11	101	1001	10 001
$\lg x$	$\approx 1,041$	$\approx 2,004$	$\approx 3,000 4$	$\approx 4,000 04$

 $\tan \alpha$  : tangente de l'angle  $\alpha$ 

$\alpha$ (rad)	$\frac{\pi}{2,01}$	$\frac{\pi}{2,02}$	$\frac{\pi}{2,03}$	$\frac{\pi}{2,04}$	$\frac{\pi}{2,05}$
$\tan \alpha$	$\approx 128$	$\approx 64,3$	$\approx 43,1$	$\approx 32,5$	$\approx 26,1$

$\alpha$ (rad)	$\frac{\pi}{2,1}$	$\frac{\pi}{2,2}$	$\frac{\pi}{2,3}$	$\frac{\pi}{2,4}$	$\frac{\pi}{2,5}$
$\tan \alpha$	$\approx 13,3$	$\approx 7,0$	$\approx 4,8$	$\approx 3,7$	$\approx 3,1$

$\alpha$ (rad)	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{100}$	$\frac{\pi}{300}$	$\frac{\pi}{1000}$
$\tan \alpha$	$\approx 0,3$	$\approx 0,1$	$\approx 0,03$	$\approx 0,01$	$\approx 0,003$

Fin de l'énoncé