

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

FILIÈRE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2007

## DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

## Relations de commutation

Dans ce problème, on se propose de décrire les triplets  $(K, E, F)$  où  $K, E, F$  sont trois endomorphismes d'un espace vectoriel satisfaisant certaines relations de commutation. On désignera toujours par  $q$  un nombre complexe non nul et tel que pour tout entier  $n > 0$ ,  $q^n \neq 1$ .

## Première partie

Dans cette partie, on désigne par  $X$  un espace vectoriel complexe de dimension finie  $n \geq 2$ , et par  $(x_1, \dots, x_n)$  une base de  $X$ .

1. Soit  $A$  un endomorphisme de  $X$  représenté dans la base  $(x_1, \dots, x_n)$  par une matrice diagonale de coefficients diagonaux  $a_1, \dots, a_n$  deux à deux distincts. Montrer que tout endomorphisme  $B$  de  $X$ , commutant à  $A$ , est aussi représenté par une matrice diagonale.

2. Soit  $A_1, \dots, A_p$  des endomorphismes de  $X$ .

2.a) Montrer que, si les seuls sous-espaces vectoriels de  $X$  stables par  $A_1, \dots, A_p$  sont  $\{0\}$  et  $X$ , alors tout endomorphisme  $B$  de  $X$ , commutant à  $A_1, \dots, A_p$ , est un multiple scalaire de l'identité.

2.b) La réciproque est-elle vraie ?

## Deuxième partie

On définit  $X$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  comme à la première partie. On note  $K_0$  et  $F_0$  les endomorphismes de  $X$  définis comme suit :

$$\forall p = 1, \dots, n, \quad K_0 x_p = q^{n+1-2p} x_p, \quad F_0 x_p = \begin{cases} x_{p+1} & \text{si } p < n \\ 0 & \text{si } p = n \end{cases}.$$

3. Calculer  $K_0 F_0 - q^{-2} F_0 K_0$ .

4. Déterminer les sous-espaces vectoriels de  $X$  stables par  $F_0$ , puis ceux stables par  $F_0$  et  $K_0$ .

On définit un troisième endomorphisme  $E_0$  de  $X$  par

$$E_0 x_p = \begin{cases} (q - q^{-1})^{-2} (q^{p-1} - q^{1-p}) (q^{n+1-p} - q^{p-n-1}) x_{p-1} & \text{si } p > 1 \\ 0 & \text{si } p = 1 \end{cases} .$$

5. Calculer  $K_0 E_0 - q^2 E_0 K_0$ .

6. Vérifier la relation

$$E_0 F_0 - F_0 E_0 = (q - q^{-1})^{-1} (K_0 - K_0^{-1}) .$$

7. Déterminer les sous-espaces vectoriels de  $X$  stables par  $K_0, E_0, F_0$ .

### Troisième partie

Dans cette partie, on désigne par  $K$  et  $E$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel complexe  $X$  de dimension  $n$  satisfaisant les conditions suivantes :

- i)  $KE = q^2 EK$
- ii)  $K$  est inversible
- iii)  $E$  est non nul.

Pour tout nombre complexe  $\lambda$  on pose

$$X_\lambda = \text{Ker} (K - \lambda I) \quad , \quad Y_\lambda = \text{Ker} (E - \lambda I) .$$

8. Vérifier les relations

$$E(X_\lambda) \subset X_{q^2 \lambda} \quad , \quad K(Y_\lambda) \subset Y_{q^{-2} \lambda} .$$

9. Montrer que  $Y_\lambda$  est réduit à  $\{0\}$  si  $\lambda$  est non nul.

10. Indiquer un nombre entier  $r > 0$  tel que  $E^r = 0$ .

11. Montrer qu'il existe un élément  $x$  non nul de  $\text{Ker } E$ , vecteur propre pour  $K$ .

12. On suppose  $X$  de dimension 2, et on se propose de démontrer l'existence d'une base  $(x_1, x_2)$  de  $X$  possédant les propriétés suivantes :

- (P1)  $K x_1 = \lambda x_1$  où  $\lambda$  est un scalaire convenable
- (P2)  $K x_2 = q^{-2} \lambda x_2$

(P3)  $E x_1 = 0$

(P4)  $E x_2 = x_1$ .

**12.a)** Montrer qu'il existe un vecteur  $x_1^0$  et un scalaire  $\lambda$  tels que l'on ait

$$K x_1^0 = \lambda x_1^0 \quad \text{et} \quad E x_1^0 = 0 .$$

On note  $x_2^0$  un vecteur non nul et non proportionnel à  $x_1^0$ .

**12.b)** Montrer que le vecteur  $E x_2^0$ , qu'on note  $x_1$ , est un multiple non nul de  $x_1^0$ .

**12.c)** Montrer qu'il existe un scalaire  $\beta$  tel que

$$K x_2^0 = \beta x_1 + q^{-2} \lambda x_2^0 .$$

**12.d)** Trouver un scalaire  $\alpha$  tel que les vecteurs  $x_1$  et  $x_2 = x_2^0 + \alpha x_1$  répondent à la question.

### Quatrième partie

Dans cette quatrième partie on désigne par  $X$  un espace vectoriel complexe de dimension  $n \geq 2$  et on considère un triplet  $(K, E, F)$  d'endomorphismes de  $X$  satisfaisant les conditions suivantes :

- i)  $K$  est inversible,  $K^2 \neq I$
- ii)  $KE = q^2 EK$
- iii)  $KF = q^{-2} FK$
- iv)  $EF - FE = (q - q^{-1})^{-1}(K - K^{-1})$
- v) les seuls sous-espaces vectoriels de  $X$ , stables par  $K, E, F$ , sont  $\{0\}$  et  $X$ .

**13.** Vérifier que, pour tout entier  $m > 0$ , on a

$$EF^m - F^m E = (q - q^{-1})^{-2}(q^m - q^{-m}) F^{m-1} (q^{1-m} K - q^{m-1} K^{-1}) .$$

Dans ce qui suit, on note  $\nu_1$  un vecteur non nul de  $X$ , annulé par  $E$  et vecteur propre de  $K$  pour une certaine valeur propre que l'on notera  $\lambda$ . Pour tout entier  $m > 0$ , on pose  $\nu_m = F^{m-1} \nu_1$ .

**14.** Calculer  $K \nu_m$ .

**15.** Démontrer la relation

$$\forall m \geq 2 \quad , \quad E \nu_m = (q - q^{-1})^{-2}(q^{m-1} - q^{1-m})(q^{2-m} \lambda - q^{m-2} \lambda^{-1}) \nu_{m-1} .$$

16. Démontrer les assertions suivantes :

16.a) Ceux des vecteurs  $\nu_m$  qui sont non nuls, sont linéairement indépendants.

16.b) Il existe  $m_0 \geq 1$  tel que  $\nu_m = 0$  pour tout  $m > m_0$  et que  $\nu_1, \dots, \nu_{m_0}$  soient linéairement indépendants.

16.c) On a  $m_0 = n$ .

16.d) On a  $\lambda = \pm q^{n-1}$ .

17. Comparer le triplet  $(K, E, F)$  avec le triplet  $(K_0, E_0, F_0)$  considéré à la deuxième partie.

\* \*  
\*