Concours Centrale - Supélec 2006

Épreuve : MATHÉMATIQUES I **Filière** PSI

Notations et définitions

$\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

On note $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et L^1 l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in L^1$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f|$.

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ bornées sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in \mathcal{B}$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{\mathbb{R}^+} |f|$.

Si $\alpha \in [1,+\infty[$, on convient que $0^\alpha = 0$; ainsi $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^\alpha$ est continue.

On pose, lorsque cela a un sens, $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt$.

Soit (E_0) une équation différentielle linéaire homogène du second ordre de la forme
$$y'' + ay' + by = 0$$
où a et b sont dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$; à toute fonction $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, on associe l'équation différentielle (E_h) dont h est le second membre : $y'' + ay' + by = h$.

Par définition, une solution de (E_h) (resp. (E_0)) est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de la variable t de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant l'équation (E_h) (resp. E_0). On définit les propriétés de stabilité suivantes :

- on dira que (E_0) est **stable par rapport aux conditions initiales** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si f est une solution de (E_0) vérifiant $\|(f(0), f'(0))\| \leqslant \eta$, alors $f \in \mathcal{B}$ et $\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
- on dira que (E_0) est **stable par rapport au second membre au sens 1** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $h \in L^1$ est tel que $\|h\|_1 \leqslant \eta$ et f est une solution de (E_h) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0,0)$, alors $f \in \mathcal{B}$ et $\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
- on dira que (E_0) est **stable par rapport au second membre au sens ∞** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $h \in \mathcal{B}$ est tel que $\|h\|_\infty \leqslant \eta$ et f est solution de (E_h) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0,0)$, alors $f \in \mathcal{B}$ et $\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Soit $\alpha \in [1,+\infty[$ et $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. On note $E_{\alpha,h}$ l'équation différentielle linéaire :

$$(E_{\alpha,h}) \ : \ y'' - \frac{1}{1+t^\alpha}\, y' + y = h$$

Par définition, une solution de $(E_{\alpha,h})$ est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de la variable t de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(E_{\alpha,h})$.

Pour l'équation homogène associée, notée $(E_{\alpha,0})$,

- on dira que $(E_{\alpha,0})$ est **stable par rapport au paramètre** si et seulement si pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
  si $\beta \in [1,+\infty[$ vérifie $|\alpha - \beta| \leqslant \eta$, f est solution de $(E_{\alpha,0})$ et g est solution de $(E_{\beta,0})$ avec $\big(f(0),f'(0)\big) = \big(g(0),g'(0)\big) = (a,b)$, alors $f-g \in B$ et $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Objectifs et dépendance des parties

L'objectif du problème est d'étudier le comportement des solutions de $(E_{\alpha,0})$ vers $+\infty$, ainsi que les différentes notions de stabilité.

La partie **I** étudie le cas de l'équation « limite à l'infini » $y''+y=h$.

La partie **II**, indépendante de **I**, étudie le comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$.

La partie **III**, qui étudie les problèmes de stabilité pour $\alpha > 1$, utilise des résultats de **II.A**, **II.C** et **I.5**.

La partie **IV**, qui étudie le comportement à l'infini des solutions de $(E_{1,0})$, utilise **II.B**.

La partie **V**, qui étudie les problèmes de stabilité pour $\alpha = 1$, utilise les parties **IV** et **II**.

Partie I - Étude de l'équation $y'' + y = h$

Si $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$, on note (F_h) l'équation différentielle $y'' + y = h$. Par définition, une solution de (F_h) est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (F_h).

I.A - Exemples

I.A.1) Donner l'ensemble des solutions de (F_0).

I.A.2) Dans cette question uniquement, on prend pour $h : t \mapsto \cos(t)$.

Donner l'ensemble des solutions de (F_h) dans ce cas.

I.A.3) Dans cette question uniquement, on prend pour h la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}^+$, définie par

$$h(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{si} \quad t \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si} \quad t \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

Démontrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer l'ensemble des solutions de (F_h).

I.B - Stabilité par rapport aux conditions initiales

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et f est la solution de (F_0) vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (a, b)$, montrer que $f \in \mathcal{B}$ et $\|f\|_\infty \leqslant \|(a, b)\|$.

I.C - Si $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$, montrer que $f_0 : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \left(\displaystyle\int_0^t h(u) \sin(t - u)\, \mathrm{d}u\right)$ est solution de (F_h), et en déduire l'ensemble des solutions de (F_h).

I.D - Stabilité par rapport au second membre au sens 1

On donne $h \in L^1$.
Déterminer la solution f de (F_h) vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (0, 0)$, montrer que $f \in \mathcal{B}$, et $\|f\|_\infty \leqslant \|h\|_1$.
En déduire que (F_0) est stable par rapport au second membre au sens 1.

I.E - Instabilité par rapport au second membre au sens ∞

Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.
Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \delta \cos(t)$, et montrer que ses solutions sont non bornées, et plus précisement, ne sont pas en $o(t)$ quand $t \to +\infty$.

En déduire la non stabilité de (F_0) par rapport au second membre au sens ∞.

Partie II - Comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$

II.A - Démontrer l'existence de $I(\alpha)$, pour $\alpha > 1$, et sa continuité par rapport à α.

II.B - Relèvement angulaire

On donne $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$.

II.B.1) Justifier l'existence d'une primitive A de $\frac{g'}{g}$, et montrer que $g e^{-A}$ est constante.

II.B.2) En écrivant la fonction A sous la forme $A = U + iV$, où U et V sont des fonctions à valeurs réelles, justifier qu'existent $r \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^k\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ tels que $g = r e^{i\theta}$.

II.C - Comportement à l'infini pour $\alpha > 1$

Soit $\alpha > 1$ et f une solution non nulle de $(E_{\alpha,0})$. On note $q : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$.

II.C.1) En appliquant II.B, montrer qu'existent $r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ tels que $f = r\cos(\theta)$ et $f' = r\sin(\theta)$.
Exprimer r en fonction de f et f'.

Les fonctions r et θ sont fixées ainsi pour la suite de la partie.

II.C.2) Démontrer que $\theta' = -1 + q\sin(\theta)\cos(\theta)$. (1)

II.C.3) Démontrer que $r' = qr\sin^2(\theta)$. (2)

II.C.4) Démontrer que r a une limite strictement positive en $+\infty$ vérifiant $\lim\limits_{+\infty} r \leqslant r(0)\exp(I(\alpha))$.
Démontrer que f et f' sont bornées par $\|\big(f(0), f'(0)\big)\|\exp(I(\alpha))$.

II.C.5) Démontrer que $\theta(t) + t$ tend vers une limite réelle quand $t \to +\infty$.

II.C.6) Démontrer qu'existent $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) - a\cos(t+b) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

II.C.7) Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie III - Étude de la stabilité pour $\alpha > 1$

Dans toute la partie, $\alpha > 1$, et (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de $(E_{\alpha,0})$ et $w = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$ est le wronskien associé.
On pensera à utiliser les résultats de **II**.

III.A - Stabilité par rapport aux conditions initiales

Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport aux conditions initiales.

III.B - Stabilité par rapport au second membre au sens 1

III.B.1) Déterminer une équation différentielle linaire vérifiée par w et montrer qu'existent a, b réels tels que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $0 < a \leqslant |w(t)| \leqslant b$.

III.B.2) Si $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, montrer que les solutions de $(E_{\alpha,h})$ sont les fonctions du type $f = -C_1 f_1 + C_2 f_2$, où C_1 est une primitive de $\dfrac{hf_2}{w}$ et C_2 une primitive de $\dfrac{hf_1}{w}$.

III.B.3) Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes portant sur C_1 et C_2 dans la question précédente pour avoir $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$?

III.B.4) Démontrer l'existence de $C \in \mathbb{R}^+$ telle que : pour tout $h \in L^1$, la solution f de $(E_{\alpha,h})$ vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$ est dans $\mathcal{B}$, et $\|f\|_\infty \leqslant C\|h\|_1$.

En déduire que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au second membre au sens 1.

III.C - Instabilité par rapport au second membre au sens ∞

On fixe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit g une solution de l'équation différentielle $\quad y'' + y = \delta\cos(t)$.

Soit f la solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle $\quad y'' - \dfrac{1}{1+t^\alpha} y' + y = \delta\cos(t)$ telle que $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$.

On pose $\Phi = f - g$.

III.C.1) Démontrer que Φ est solution de $(E_{\alpha,h})$, pour une fonction $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ vérifiant $h(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

III.C.2) Démontrer que $h(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ implique que $\displaystyle\int_0^t |h| \underset{t \to +\infty}{=} o(t)$.

III.C.3) En utilisant la résolution de $(E_{\alpha,h})$ vue en III.B, montrer que $\Phi(t) \underset{t \to +\infty}{=} o(t)$.

III.C.4) Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ n'est pas stable par rapport au second membre au sens ∞.

III.D - Stabilité par rapport au paramètre

On fixe pour la suite de la question $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $\beta \in]1,+\infty[$.
Soit f la solution de $(E_{\alpha,0})$ vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (a,b)$ et g la solution de $(E_{\beta,0})$ vérifiant $\big(g(0), g'(0)\big) = (a,b)$.
On pose $\Phi = f - g$.

Si $\lambda > 1$, on pose $J(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\lambda}\,\mathrm{d}t$ et $K(\lambda) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\lambda}\,\mathrm{d}t$.

Comme pour I, les fonctions J et K sont bien définies et continues sur $]1,+\infty[$ (on ne demande pas de le montrer).

III.D.1) Démontrer que Φ est une solution de l'équation différentielle $(E_{\alpha,h})$ avec

$$h : t \mapsto \left(\frac{1}{1+t^\alpha} - \frac{1}{1+t^\beta}\right) g'(t)$$

III.D.2) Démontrer que $h \in L^1$ et

$$\|h\|_1 \leqslant \|(a,b)\|\ \mathrm{e}^{I(\beta)}\Big(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)|\Big).$$

III.D.3) Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au paramètre.

Partie IV - Étude du comportement vers $+\infty$ pour $\alpha = 1$

f est une solution non nulle de $(E_{1,0})$.
On pose $g : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{t+1}}$.

IV.A - Établir que pour tout $t \geqslant 0$, $g''(t) + \left(1 - \dfrac{3}{4(t+1)^2}\right) g(t) = 0$.

IV.B - Démontrer qu'existent $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\beta \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ telles que $g = \rho\cos(\beta)$ et $g' = \rho\sin(\beta)$.

IV.C - Déterminer une équation différentielle vérifiée par β et montrer que $\beta(t) + t$ tend vers une limite réelle lorsque $t \to +\infty$.

IV.D - Déterminer une équation différentielle vérifiée par ρ, et démontrer que ρ tend vers une limite réelle $a > 0$ en $+\infty$.

IV.E - Démontrer qu'il existe un réel b tel que $f(t) - a\sqrt{t}\cos(t+b) \underset{t\to+\infty}{=} o(\sqrt{t})$, où a est le réel défini ci-dessus.

IV.F - Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie V - Étude de la stabilité pour $\alpha = 1$

V.A - Démontrer que $(E_{1,0})$ n'est stable ni par rapport aux conditions initiales ni par rapport au paramètre.

V.B - Si $\lambda \in \mathbb{R}$, et $f_\lambda : t \mapsto \lambda t \sin(t)$, calculer $f''_\lambda(t) - \dfrac{1}{1+t} f'_\lambda(t) + f_\lambda(t)$.

Qu'en déduire concernant la stabilité de $(E_{1,0})$ par rapport au second membre au sens ∞ ?

• • • FIN • • •