

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

FILIÈRE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2006

## PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

## Étude des solutions d'une équation fonctionnelle

Ce problème a pour but l'étude des solutions de l'équation

$$f'(x) = f(\gamma x) \quad (C_\gamma)$$

où l'inconnue  $f$  est une fonction réelle dérivable d'une variable réelle et où  $\gamma$  est un nombre réel fixé non nul. On considérera aussi le système

$$f'(x) = f(\gamma x) \quad , \quad f(0) = \alpha \quad (C_{\gamma,\alpha})$$

où  $\alpha$  est un nombre réel fixé.

## Première partie

Dans cette première partie, la variable  $x$  varie dans  $\mathbf{R}$  et on suppose  $|\gamma| \leq 1$ .

1. Résoudre le système  $(C_{\gamma,\alpha})$  dans le cas où  $\gamma = 1$ .

2. Même question dans le cas où  $\gamma = -1$ .

3.a) Vérifier que la série entière  $\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!}$  est absolument convergente pour tout réel  $x$  et que sa somme est solution du système  $(C_{\gamma,\alpha})$ .

3.b) En serait-il de même si l'on supposait  $|\gamma| > 1$  ?

4. Étant donné un nombre réel  $A > 0$ , on désigne par  $E_A$  l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'intervalle  $[-A, A]$  et on le munit de la norme  $\| \cdot \|$  définie par  $\|g\| = \sup_{|x| \leq A} |g(x)|$ .

On note  $T_A$  l'application de  $E_A$  dans lui-même définie par

$$(T_A g)(x) = \alpha + \int_0^x g(\gamma t) dt .$$

4.a) Vérifier que l'application  $T_A$  est continue.

4.b) Vérifier qu'une fonction dérivable  $f$  sur  $\mathbf{R}$  est solution de  $(C_{\gamma,\alpha})$  si et seulement si, pour tout  $A > 0$ , la restriction de  $f$  à  $[-A, A]$  est un point fixe de  $T_A$ .

4.c) Vérifier que, pour tout entier  $n > 0$ , tout réel  $A > 0$ , tout  $x \in [-A, A]$  et tous  $g, h \in E_A$ ,

$$|(T_A^n g)(x) - (T_A^n h)(x)| \leq |\gamma|^{n(n-1)/2} \frac{|x|^n}{n!} \|g - h\|.$$

4.d) Déterminer un entier  $n(A) > 0$  tel que l'on ait, pour tous  $g, h \in E_A$ ,

$$\|T_A^{n(A)} g - T_A^{n(A)} h\| \leq k \|g - h\|$$

avec une constante  $k < 1$ .

4.e) Démontrer l'unicité de la solution du système  $(C_{\gamma,\alpha})$ .

5. On pose, pour tout  $x$  réel,

$$f_\gamma(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!}.$$

5.a) Déterminer la limite de  $f_\gamma(x)$  lorsque  $\gamma$  tend vers 0.

5.b) Montrer que la fonction  $(\gamma, x) \mapsto F(\gamma, x) = f_\gamma(x)$ , définie maintenant sur l'ensemble  $[-1, 1] \times \mathbf{R}$ , est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

5.c) On suppose ici  $\gamma \geq 0$  et on s'intéresse à la fonction  $f_\gamma$  restreinte à l'intervalle  $[-1, +\infty[$ . Déterminer son signe, son sens de variation et sa limite lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

## Deuxième partie

**Notations.** Étant donné une suite de nombres réels  $u_n$ , où  $n$  parcourt l'ensemble  $\mathbf{Z}$ , on dira que la série  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n$  est *absolument convergente* si les deux séries  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n > 0} u_{-n}$  le sont ; dans ce cas on posera

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n = \sum_{n \geq 0} u_n + \sum_{n > 0} u_{-n}.$$

Dans cette partie, on suppose  $\gamma > 1$  et on s'intéresse au système  $(C_{\gamma,\alpha})$  où  $x$  parcourt l'intervalle  $] -\infty, 0]$ .

6. Étant donné un nombre réel  $c_0$ , trouver des nombres réels  $c_n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , possédant les propriétés suivantes :

(i)  $\sum_{n \geq 0} |c_n| \gamma^n < +\infty$  ,  $\sum_{n \geq 0} |c_{-n}| \gamma^n < +\infty$ ,

(ii) la série  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{\gamma^n x}$  est absolument convergente pour tout  $x \in ] -\infty, 0]$ , et sa somme  $\varphi(x)$  est solution de  $(C_\gamma)$ .

**N.B.** On ne demande pas de prouver l'unicité des  $c_n$ .

7. Dédurre de la question 6 une solution de  $(C_{\gamma,\alpha})$  sur l'intervalle  $]-\infty, 0]$ .

8. Que se passe-t-il si l'on suppose  $x \in [0, +\infty[$  au lieu de  $x \in ]-\infty, 0]$ , et si l'on remplace la série  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{\gamma^n x}$  par la série  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{-\gamma^n x}$ , mais en conservant les conditions (i) ?

### Troisième partie

Dans cette partie, on suppose  $\gamma > 1$  et on note  $G_\gamma$  l'espace vectoriel des solutions de  $(C_\gamma)$  définies sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Pour tout  $p \in \mathbf{Z}$ , on pose  $I_{(p)} = [\gamma^p, \gamma^{p+1}]$ .

9. Vérifier que, si  $f \in G_\gamma$ , on a

$$f^{(n)}(x) = \gamma^{kn - k(k+1)/2} f^{(n-k)}(\gamma^k x)$$

pour tous entiers  $k$  et  $n$  tels que  $0 \leq k \leq n$  et tout  $x \in ]0, +\infty[$ .

Pour toute fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$ , on note  $f_{(p)}$  la restriction de  $f$  à  $I_{(p)}$ .

10. Vérifier que l'application  $\Psi : G_\gamma \rightarrow C^\infty(I_{(0)})$  définie par  $\Psi(f) = f_{(0)}$  est injective.

11. Étant donné un élément  $g$  de  $C^\infty(I_{(0)})$ , donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les dérivées de  $g$  aux points 1 et  $\gamma$ , pour que  $g$  appartienne au sous-espace image de  $\Psi$ .

12. On se donne un élément  $f$  de  $G_\gamma$  et on fait l'hypothèse que  $f(\gamma^{-p})$  est nul pour tout entier  $p \geq 0$ . On se propose de démontrer que  $f$  est nulle.

12.a) Vérifier que, pour tout  $p > 0$ , on a

$$f_{(-p)}^{(p)}(x) = \gamma^{p(p-1)/2} f_{(0)}(\gamma^p x) \quad , \quad x \in I_{(-p)}$$

et

$$f_{(-p)}^{(k)}(\gamma^{-p}) = 0 \quad , \quad \text{pour tout } k < p .$$

12.b) Déterminer pour tout  $p > 0$  un nombre réel  $q_p$  tel que l'on ait, pour tout  $x \in I_{(-p)}$  :

$$f_{(-p)}(x) = q_p \int_{\gamma^{-p}}^x (x-t)^{p-1} f_{(0)}(\gamma^p t) dt .$$

[On pourra utiliser la formule de Taylor.]

12.c) Montrer que l'on a  $\int_1^\gamma (\gamma-t)^{p-1} f_{(0)}(t) dt = 0$  pour tout  $p > 0$ .

12.d) Conclure.

\* \*  
\*