e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage des calculatrices est interdit

Notations

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.
$\mathcal{C}^0(I)$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et on note : désigne

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

On désigne par $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ et on note :

$$L^1(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I)\ ;\ \int_I |f| \text{ existe} \right\} \text{ et } \qquad \forall f \in L^1(I),\ \|f\|_1 = \int_I |f|$$

$$L^2(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I)\ ;\ \int_I |f|^2 \text{ existe} \right\} \text{ et } \qquad \forall f \in L^2(I),\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}$$

Partie I

1 - Soit f dans $\mathcal{C}^0(I)$ et c un réel strictement positif. Démontrer que l'équation :

$$y' + cy = f$$

admet une unique solution, notée $\varphi(f)$, dérivable sur I, et qui vérifie :

$$\varphi(f)(0) = 0$$

Démontrer :

$$\forall x \in I,\ \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t)\, dt$$

2 - Exprimer $\varphi'(f)$ en fonction de f et $\varphi(f)$ et démontrer que $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Prouver que l'application $\varphi :\ f \mapsto \varphi(f)$ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$.

Partie II

On suppose dans cette partie que l'intervalle I est un segment $[a,b]$ avec $a \leqslant 0 < b$.

1 - Démontrer qu'il existe des réels positifs M_1 et M_2 tels que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \|f\|_1 \leqslant M_1 \|f\|_2 \leqslant M_2 \|f\|_\infty$$

2 - Démontrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant M_0 \|f\|_\infty$$

3 - Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \forall x \in I,\ |\varphi(f)(x)| \leqslant A \|f\|_1$$

4 - Démontrer qu'il existe un réel B positif tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \forall x \in I,\ |\varphi(f)(x)| \leqslant B \|f\|_2$$

En déduire :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \|\varphi(f)\|_2 \leqslant K \|f\|_2$$

5 - L'application φ de $\mathcal{C}^0([a,b])$ dans lui-même est-elle continue

a) lorsque $\mathcal{C}^0([a,b])$ est muni de la norme $\|\,\|_\infty$?

b) lorsque $\mathcal{C}^0([a,b])$ est muni de la norme $\|\,\|_1$?

c) lorsque $\mathcal{C}^0([a,b])$ est muni de la norme $\|\,\|_2$?

Partie III

Dans cette partie, I désigne l'intervalle $[0,+\infty[$ et pour tout réel $\lambda > 0$, f_λ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$$

1 - Déterminer $\varphi(f_\lambda)$.

2 - Démontrer que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont intégrables sur I.
Calculer $\|f_\lambda\|_1$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1$.

3 - Démontrer que f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont intégrables sur I.
Calculer $\|f_\lambda\|_2$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2$.

4 - Démontrer que φ est un endomorphisme continu de $L^1(I)$ et calculer :

$$|||\varphi|||_1 = \sup_{\substack{f \in L^1(I) \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \|\varphi(f)\|_1$$

5 - On pose $g = \varphi(f)$. On a donc $f = g' + cg$.
Démontrer :

$$\forall X > 0,\ \frac{g^2(X)}{2} + c\int_0^X g^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^X f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$ et calculer :

$$|||\varphi|||_2 = \sup_{\substack{f \in L^2(I) \\ \|f\|_2 \leqslant 1}} \|\varphi(f)\|_2$$

Partie IV

Soit R un réel strictement positif. On note G l'espace vectoriel réel des fonctions développables en série entière sur l'intervalle $]-R, R[$.

1 - Démontrer que φ est un endomorphisme de G.

2 - Pour f élément de G, on note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles pour lesquelles :

$$\forall x \in\,]-R, R[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \varphi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Exprimer, pour tout entier naturel n, b_n en fonction des termes de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
On pourra utiliser la relation $f = \varphi(f)' + c\varphi(f)$.

Partie V

I désigne maintenant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $H(I)$ est l'espace vectoriel réel des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que f et f' soient de carrés intégrables sur I :

$$H(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(I),\ \int_I |f|^2 \text{ et } \int_I |f'|^2 \text{ existent} \right\}$$

1 - a) Démontrer que si f et g sont dans $H(I)$ alors les fonctions fg et $f'g'$ sont intégrables sur I.

b) Démontrer que l'application :

$$\phi : \begin{array}{ccc} H(I)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \phi(f,g) = \displaystyle\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_I f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

définit un produit scalaire sur $H(I)$.

c) En déduire que l'application $\|\|_H$ définie par :

$$\forall f \in H(I),\ \|f\|_H = \sqrt{\int_I f^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_I f'^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

est une norme sur $H(I)$.

2 - On suppose dans cette question que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$.
On pose :

$$K = \{f \in H(I),\ f(0) = 0\}$$

a) Démontrer que, pour tout f dans $L^2(I)$, $\varphi(f)'$ est dans $L^2(I)$, $\varphi(f)$ est dans K.
Démontrer :

$$\exists A > 0,\ \forall f \in L^2(I),\ \|\varphi(f)\|_H \leqslant A\,\|f\|_2$$

b) Démontrer que φ est un isomorphisme de $L^2(I)$ dans K.

c) Démontrer que φ est continue de $\left(L^2(I), \|\|_2\right)$ dans $(K, \|\|_H)$.

d) Démontrer que φ^{-1} est continue de $(K, \|\|_H)$ dans $\left(L^2(I), \|\|_2\right)$.

Partie VI

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques muni de la norme :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_E = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

F désigne l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. F est muni de la norme :

$$\forall f \in F,\ \|f\|_F = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

1 - Démontrer que, pour tout f dans E, il existe une unique solution, notée $\psi(f)$, dans F de l'équation :

$$y' + cy = f$$

Exprimer $\psi(f)(0)$ en fonction de f et c.
Démontrer que ψ est un isomorphisme de E dans F.

2 - Pour tout f dans E et tout entier relatif k, on pose :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad d_k(f) = c_k(\psi(f)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(f)(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

Exprimer $d_k(f)$ en fonction de $c_k(f)$.

3 - Démontrer que, pour tout f dans E, la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ converge et :

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_E^2$$

Pour g dans F, calculer $\|g\|_F$ en fonction des $c_k(g)$.
Comparer $\|f\|_E$ et $\|\psi(f)\|_F$ pour f dans E. *On pourra distinguer les cas $c \leqslant 1$ et $c > 1$.*

4 - Démontrer que ψ est continue de $(E, \|\,\|_E)$ dans $(F, \|\,\|_F)$.
Démontrer que ψ^{-1} est continue de $(F, \|\,\|_F)$ dans $(E, \|\,\|_E)$.