CONCOURS COMMUN 2005
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Vendredi 20 mai 2005 de 08h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Barème indicatif : Premier problème 1/2 - Deuxième problème 1/2

Premier problème

Partie A.

On se propose dans cette partie d'étudier la fonction définie pour tout nombre réel t par :

$$f(t) = e^{-t}.\cos(t)$$

et de donner une allure de sa courbe représentative.

1. Etudier, sur l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, les variations de la fonction f.
2. Exprimer $f(t + 2k\pi)$ en fonction de $f(t)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

   En déduire les variations de f sur $\left[\frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$

3. Soient u et v les fonctions définies sur **R** par : $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$
   (C_1) et (C_2) leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Soit encore (C) la courbe représentative de f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Déterminer les points d'intersection de (C) et (C_1) puis de (C) et (C_2) ; que dire alors de la limite de la fonction f en $-\infty$.

4. Comparer les tangentes à (C) et (C_1) aux points d'intersection trouvés à la question précédente ; faire de même pour (C) et (C_2).

5. Etudier la limite de f en $+\infty$.

6. Utiliser ce qui précède pour représenter graphiquement (C) , (C_1) et (C_2) sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

   On pourra utiliser les valeurs numériques suivantes:

   $e^{\frac{-\pi}{4}} \approx 0{,}46$ $\quad e^{\frac{\pi}{4}} \approx 2{,}19$ $\quad e^{\frac{-3\pi}{4}} \approx 0{,}09$ $\quad e^{-\pi} \approx 0{,}04$

   $e^{\frac{-\pi}{2}} \approx 0{,}21$ $\quad e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4{,}81$ $\quad e^{\frac{-3\pi}{2}} \approx 0{,}01$ $\quad \sqrt{2} \approx 1{,}41$

7. Pour tout entier naturel k on pose :

$$a_k = \int_{\frac{-\pi}{2}+k\pi}^{\frac{-\pi}{2}+(k+1)\pi} e^{-t}.\cos(t).dt$$

   Calculer cette intégrale (on pourra utiliser deux intégrations par parties).

8. Montrer que $(a_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

9. On pose : $\forall k \in N$, $b_k = |a_k|$; calculer $s_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ en fonction de n, puis étudier la limite de s_n quand n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Partie B.

On se propose maintenant de tracer la courbe paramétrée définie pour $t \in [0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos(t) \\ y = e^{-t}\sin(t) \end{cases}$$

10. Déterminer les vecteurs vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et accélération $\overrightarrow{A(t)}$ à la date t.

11. Exprimer $\left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\|$ en fonction de t.

12. Démontrer que l'angle $\varphi = \left(\overrightarrow{OM}, \vec{V}\right)$ que fait le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ avec le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ à la date t est constant et en donner une mesure.

13. Donner une équation polaire de la courbe puis la représenter pour $t \in [0,2\pi[$.
    (On ne demande pas d'étude supplémentaire)

Partie C.

Soit $E = \mathbf{R}^2$, muni de sa base canonique. Pour tout réel t, on appelle F_t l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est : $M_t = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(t) & -e^{-t}\sin(t) \\ e^{-t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix}$

14. Déterminer la nature de F_π.

15. Montrer que F_t est la composée de deux endomorphismes simples de E, dont on donnera les éléments caractéristiques. (On peut utiliser soit le cours d'algèbre linéaire, soit les complexes)

16. Soit $\mathcal{F} = \{F_t, t \in \mathbf{R}\}$: ensemble des endomorphismes F_t, quand t décrit **R**. Montrer que la composition des applications, notée o, est interne sur $\mathcal{F}$, puis montrer que ($\mathcal{F}$, o) est un groupe isomorphe au groupe (**R**,+).

Deuxième problème

On note $\mathcal{M}_2$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On note $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle, et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité.

On rappelle que ($\mathcal{M}_2$, + , .) est un espace vectoriel réel et que ($\mathcal{M}_2$, + , $\times$) est un anneau.

Partie A.

A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_2$, différente de I et θ, on considère l'application f de $\mathcal{M}_2$ vers lui-même définie par :

$$f : M \mapsto f(M) = M \times A - A \times M$$

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_2$? (On ne demande pas de justifier cette réponse)

2. Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2$.

3. Soit $K = \{ M \in \mathcal{M}_2 \mid A \times M = M \times A \}$.

   Montrer que K est un sous-espace vectoriel de ($\mathcal{M}_2$, + , .).

4. Montrer que I et A appartiennent à Ker f.

5. Montrer que Ker f est stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire $A \in \operatorname{Ker} f$ et $B \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow A \times B \in \operatorname{Ker} f$ (La démonstration sera détaillée)

6. Montrer que (Ker f , + , $\times$) est un anneau.

Partie B.

On pose maintenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2$.

7. Calculer f(M).

8. a) Montrer que Ker f est le sous-espace vectoriel engendré par I et A.

   b)Trouver une base de Ker f et préciser la dimension de Ker f ainsi que le rang de f.

9. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

10. Soit $N = x.I + y.A$ un élément de Ker f ; déterminer N^n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

11. Résoudre dans Ker f l'équation : $N^2 = I$.

Partie C.

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par s l'application de (P) vers lui-même qui au point m de coordonnées (x , y) fait correspondre le point m' de coordonnées (x' , y'), définies par :

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -y \end{cases}$$

12. Calculer $s \circ s$, puis reconnaître s et préciser ses éléments caractéristiques.

13. Soit A le projeté orthogonal de m sur Oy ; trouver l'équation y = F(x) de l'ensemble des points m du plan vérifiant la relation :

$$\overrightarrow{Am}.\overrightarrow{Om'} = 4$$

   Etudier la fonction trouvée, construire cet ensemble, avec ses asymptotes.

14. Soit Γ le cercle de centre O et de rayon 1 du plan (P). Déterminer une équation de son image $\Gamma' = s(\Gamma)$.

15. Soit $(O, \vec{I}, \vec{J})$ un nouveau repère orthonormé direct tel qu'une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{I})$ soit le réel α. Ecrire les formules de passage de $(O, \vec{i}, \vec{j})$ à $(O, \vec{I}, \vec{J})$, c'est à dire exprimer les coordonnées (x , y) d'un point dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en fonction des coordonnées (X , Y) de ce même point dans $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

16. Trouver une équation de Γ' dans $(O, \vec{I}, \vec{J})$ en fonction de $\cos 2\alpha$ et de $\sin 2\alpha$.

17. On suppose maintenant $\alpha = \frac{\pi}{8}$, donner une équation de Γ' dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$; en déduire la nature de la conique Γ' et préciser ses paramètres a et b. Tracer Γ' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   On pourra utiliser : $3 + 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$; $3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$ et $\sqrt{2} \approx 1.4$