ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2005

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Étude de certaines matrices symétriques réelles

Le but de ce problème est l'étude des valeurs propres et vecteurs propres de certaines matrices symétriques réelles.

On désigne par N un nombre entier au moins égal à 2. On munit l'espace $\mathbf{R}^N$ de son produit scalaire et de sa norme usuels notés respectivement $(\ |\ )$ et $\|\ \|$. On identifie une matrice $N \times N$ réelle A avec l'endomorphisme qu'elle représente dans la base naturelle de $\mathbf{R}^N$ et on note $\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

Première partie

1. Étant donné une matrice $N \times N$ réelle symétrique A, démontrer les assertions suivantes :

a) $\|A\|$ est égal au maximum des valeurs absolues des valeurs propres de A.

b) La plus grande valeur propre de A, notée λ, est égale à la borne supérieure des nombres $\dfrac{(Ax|x)}{\|x\|^2}$ où $x \in \mathbf{R}^N$ et $x \neq 0$.

c) Pour un élément x de $\mathbf{R}^N$, on a $Ax = \lambda x$ si et seulement si $(Ax|x) = \lambda\|x\|^2$.

Dans la suite du problème, on désigne par E un ensemble de couples (i,j) de $\{1,\dots,N\} \times \{1,\dots,N\}$, tels que $i \neq j$ et que $(i,j) \in E$ implique $(j,i) \in E$; on note M_E l'ensemble des matrices $N \times N$ réelles symétriques et dont les coefficients $a_{i,j}$ satisfont, pour $i \neq j$:

$$a_{i,j} > 0 \quad \text{si} \quad (i,j) \in E\ , \quad a_{i,j} = 0 \quad \text{dans le cas contraire}\ .$$

Deuxième partie

Dans cette deuxième partie, on prend pour E l'ensemble des couples $(i, i+1)$ et $(i+1, i)$ où $i = 1, \dots, N-1$.

2. Montrer que toutes les valeurs propres de toute matrice A de M_E sont simples.

Dans la suite de cette partie, on prend pour A la matrice, notée A_N, de coefficients

$$a_{i,i} = 0 \ , \quad a_{i,j} = 1 \quad \text{si} \quad (i,j) \in E \ ,$$

tous les autres coefficients étant nuls. On note P_N son polynôme caractéristique : $P_N(X) = \text{dét}\ (X.id - A_N)$. On pose $P_1(X) = X$.

3.a) Calculer P_2 et P_3.

b) Écrire une relation donnant P_N en fonction de P_{N-1} et P_{N-2}.

c) Calculer dét A_N.

d) Le polynôme P_N est-il pair, impair ?

4. Soit x un vecteur propre de A_N associé à une valeur propre λ, de coordonnées $x_1, \dots, x_N$. Exprimer x_k en fonction de x_1 et de $P_{k-1}(\lambda)$ pour $k = 2, \dots, N$, puis x_{N-k} en fonction de x_N et de $P_k(\lambda)$ pour $k = 1, \dots, N-1$.

5.a) Démontrer les inégalités

$$4 - \frac{6}{N} \leqslant \|A_N\|^2 < 4 \ .$$

[On pourra écrire $4\|x\|^2 - \|A_N x\|^2$ sous la forme d'une somme de carrés de termes de la forme x_i ou $x_i - x_j$.]

b) Vérifier que l'on a $\|A_{N-1}\| < \|A_N\|$.

6. Soit λ_N la plus grande valeur propre de A_N. Montrer qu'il existe un vecteur propre x pour cette valeur propre dont toutes les coordonnées x_k sont strictement positives.

Troisième partie

Dans cette partie, on prend pour E l'ensemble formé des couples $(i, i+1)$ et $(i+1, i)$ où $i = 1, \dots, N-1$, et des couples $(1, N)$ et $(N, 1)$. On définit A par

$$a_{i,i} = 0 \ , \quad a_{i,j} = 1 \quad \text{si} \quad (i,j) \in E \ ,$$

tous les autres coefficients étant nuls.

On munit $\mathbf{C}^N$ de son produit scalaire usuel.

7.a) Déterminer les nombres réels c pour lesquels le vecteur x de coordonnées $x_k = e^{ikc}$ est vecteur propre de A. Préciser la valeur propre correspondante λ_c.

b) Construire une base orthonormée (e_n), $n = 0, \dots, N-1$, de $\mathbf{C}^N$ formée de vecteurs propres de A.

c) Déterminer les multiplicités des valeurs propres de A.

On pose $\alpha = e^{2\pi i/N}$ et on note F l'espace vectoriel des applications $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ satisfaisant $f(q+N) = f(q)$ pour tout $q \in \mathbf{Z}$. On définit un endomorphisme Φ de F par

$$(\Phi f)(p) = N^{-\frac{1}{2}} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha^{-pq} f(q) .$$

8.a) Montrer que Φ est un isomorphisme unitaire, et déterminer son inverse.

b) On définit un endomorphisme Ψ de F par

$$(\Psi f)(p) = f(p-1) + f(p+1) .$$

Calculer l'endomorphisme $\Omega = \Phi \circ \Psi \circ \Phi^{-1}$.

c) Déduire de ce qui précède une nouvelle démonstration de la question **7.b)**.

Quatrième partie

On suppose maintenant que l'ensemble E satisfait la condition suivante :
(C) Pour tout couple $(i,j) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$, il existe un entier $p \geqslant 1$ et des indices $k_0, k_1, \dots, k_p$ tels que $k_0 = i$, $k_p = j$, $(k_q, k_{q+1}) \in E$ pour tout $q = 0, \dots, p-1$.

On note A une matrice de M_E, et λ sa plus grande valeur propre. On se propose de démontrer le résultat suivant :
(R) La valeur propre λ est simple et le sous-espace propre correspondant E_λ dans $\mathbf{R}^N$ contient un vecteur x ayant toutes ses coordonnées strictement positives.

9. Vérifier que, si un vecteur x appartient à E_λ, il en est de même du vecteur $|x|$ de coordonnées $|x_i|$.

10. On suppose que E_λ contient un vecteur x, non nul, tel que $x_i \geqslant 0$ pour tout i et $x_{i_0} = 0$ pour un certain indice i_0.

a) Montrer qu'il existe deux indices u et v tels que $x_u = 0$, $x_v > 0$ et $(u,v) \in E$.

b) On fixe u et v ayant la propriété ci-dessus. Pour tout $\varepsilon > 0$ on définit un vecteur x_ε par ses coordonnées

$$x_{\varepsilon,i} = x_i \quad \text{si} \quad i \neq u \ , \quad x_{\varepsilon,u} = \varepsilon \ .$$

Montrer que, pour tout ε suffisamment petit, on a

$$\frac{(Ax_\varepsilon|x_\varepsilon)}{\|x_\varepsilon\|^2} > \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2} .$$

c) L'hypothèse faite au début de la question **10.** est-elle valide ?

11. Démontrer le résultat (R).

* *
*