**ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

**ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET CHIMIE INDUSTRIELLES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2004** **FILIÈRE PC**

# PREMIÈRE COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

## L'héliosismologie

*L'héliosismologie – l'étude sismique du Soleil – a pris son essor au cours des années 1970 lorsque l'on s'est aperçu que les raies du spectre solaire étaient modulées à des périodes de l'ordre de 5 minutes, et que cette modulation était due aux oscillations globales du Soleil. Ces oscillations sont de type acoustique.*

*Le but de ce problème est d'analyser dans le cadre de modèles très simplifiés, la propagation de ces ondes acoustiques à l'intérieur d'un astre fluide et sphérique tel le Soleil.*

**Données numériques :**

| | | |
|---|---|---|
| Constante de gravitation : | $G = 6,67 \times 10^{-11}$ | $\mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^3{\cdot}s^{-2}}$ |
| Constante des gaz parfaits : | $R_{\mathrm{GP}} = 8,31$ | $\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$ |
| Masse molaire de l'hydrogène : | $m_{\mathrm{H}} = 1$ | $\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ |
| Masse molaire de l'hélium : | $m_{\mathrm{He}} = 4$ | $\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ |
| Masse molaire moyenne du Soleil : | $\mu = 1,27$ | $\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ |
| Masse du Soleil : | $M = 2,0 \times 10^{30}$ | kg |
| Rayon du Soleil : | $R = 7,0 \times 10^{8}$ | m |
| Température de surface du Soleil : | $T^* = 5\,800$ | K |

Dans tout le problème, on supposera que le Soleil possède la symétrie sphérique, et on négligera sa rotation propre. Sa composition sera assimilée à celle d'un gaz parfait monoatomique de masse molaire $\mu$.

## I. La structure interne du Soleil : un modèle simple

### 1. Les ordres de grandeur

On cherche à estimer l'ordre de grandeur de la pression $P_{\mathrm{C}}$, de la masse volumique $\rho_{\mathrm{C}}$ et de la température $T_{\mathrm{C}}$ au centre du Soleil. On admettra que l'étoile n'est composée que d'hydrogène atomique et d'hélium, et que la concentration en hélium est uniforme dans toute l'étoile.

**a)** Estimer, par analyse dimensionnelle, l'ordre de grandeur de la pression $P_C$ au centre d'un astre de masse $M$ et de rayon $R$ soumis à sa propre gravité. Calculer $P_C$ dans le cas du Soleil.

**b)** On désigne par $E_C$ l'énergie cinétique du gaz parfait monoatomique de masse molaire $\mu$ constituant l'étoile et par $\Omega$ l'énergie potentielle interne de gravitation de cet astre ; on admettra la relation $\Omega + 2E_C = 0$ que donne le théorème du viriel.

Trouver, à l'aide d'une simple analyse dimensionnelle, une expression de l'énergie de gravitation $\Omega$ ; écrire l'expression de l'énergie cinétique $E_C$ du gaz stellaire en supposant, *pour cette question seulement*, que la température $T$ du gaz stellaire est uniforme. En déduire l'ordre de grandeur de la température du gaz que l'on assimilera à la température $T_C$ au centre de l'astre ainsi que l'ordre de grandeur de la masse volumique centrale $\rho_C$. Calculer ces deux valeurs dans le cas du Soleil.

**2. Le champ gravitationnel**

**a)** $\vec{g}$ désignant le champ de gravitation au sein de l'astre, donner l'expression de son module $g$ au niveau repéré par la variable radiale $r$, en fonction de la masse $m(r)$ de la boule de rayon $r$.

**b)** Montrer que, dans le cas du Soleil, dont la période de rotation moyenne est de l'ordre de 27 jours, négliger la rotation est tout à fait licite.

**Pour toute la suite du problème on supposera que le module g du champ gravitationnel est uniforme dans toute l'étoile.**

**3. L'état d'équilibre**

On note $P_0(r)$ la pression d'équilibre au niveau $r$ et $g$ le module, *uniforme dans toute l'étoile*, du champ de gravitation. On suppose de plus que la structure interne de l'astre est adiabatique, l'indice adiabatique $\gamma$ étant pris lui aussi uniforme dans toute l'étoile : $P_0 = B\rho_0^\gamma$. Afin d'alléger les calculs on notera la constante de proportionnalité sous la forme $B = \dfrac{g(\gamma-1)}{\gamma A}$, $A$ étant une autre constante et on définira la profondeur $z$ dans l'astre par $z = R - r$.

**a)** Pour quelle raison physique peut-on exclure de l'étude le cas $\gamma = 1$ ?

**b)** Exprimer $g$ en fonction de $G$, $M$ et $R$ et calculer sa valeur dans le cas du Soleil.

**c)** Écrire l'équation locale exprimant l'équilibre au sein de l'astre. En déduire les expressions de $P_0(z)$ et $\rho_0(z)$. Donner l'allure des graphes correspondants.

**d)** La célérité $c$ d'une onde acoustique dans un fluide, de pression $P$ et de masse volumique $\rho$ est donnée par $c^2 = \left(\dfrac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S$, dans l'hypothèse d'adiabaticité et la dérivée étant prise à l'état d'équilibre. L'exprimer pour le Soleil en fonction de $\gamma$, $P_0$ et $\rho_0$. Montrer que, à l'intérieur du

Soleil, la valeur de cette grandeur dépend de la profondeur $z$ selon la loi :

$$c^2(z) = (\gamma - 1)gz$$

Calculer numériquement la vitesse du son $c_{\mathrm{R}} = c(R)$ au centre du Soleil, en prenant $\gamma = 5/3$.

**e)** Le Soleil possède une température de surface $T^*$ ; en déduire dans quelle partie de l'astre solaire le modèle précédent décrivant l'évolution de $c$ avec la profondeur $z$ est mis en défaut. Déterminer les expressions de la vitesse du son minimale $c^*$ et de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche $z^*$ dans laquelle le modèle n'est plus applicable. Calculer numériquement leurs valeurs avec $\gamma = 5/3$.

## II. Étude des oscillations dans les couches périphériques

Dans les couches périphériques de l'étoile, on modélise localement le milieu stellaire par une structure de plans parallèles. On repère une couche par sa profondeur $z = R - r$. On s'intéresse aux petites perturbations des champs de pression et de masse volumique, de valeurs à l'équilibre $P_0(z)$ et $\rho_0(z)$. Par souci de généralité, on mènera les calculs avec les fonctions $P_0(z)$ et $\rho_0(z)$ et non avec leurs expressions analytiques fonctions de $z$ établies précédemment. On ne se servira de ces dernières expressions que dans les cas particuliers explicitement mentionnés.

On considère des ondes planes de propagation verticale ; les perturbations des champs de vitesse verticale $v$, de pression $P$ et de masse volumique $\rho$, sont définies par :

$$v(z,t) = 0 + v_1(z,t)$$

$$P(z,t) = P_0(z) + p_1(z,t)$$

$$\rho(z,t) = \rho_0(z) + \rho_1(z,t)$$

### 1. Évolution des champs

**a)** Écrire l'équation du mouvement d'une particule fluide soumise aux seules forces de gravité et de pression. La linéariser ; le terme convectif de l'accélération $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ sera supposé négligeable.

**b)** Que traduit l'équation : $\dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial(\rho_0 v_1)}{\partial z}$ ?

**c)** L'évolution locale du gaz est supposée adiabatique avec $P = B\rho^\gamma$. En déduire par linéarisation la relation

$$p_1 = c^2 \rho_1$$

où $c^2(z)$ est la célérité locale des ondes acoustiques introduite en **I.3.d)**.

**d)** Déduire des relations précédentes l'équation décrivant la propagation du champ de masse volumique $\rho_1$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\rho_1 c^2) - g\frac{\partial \rho_1}{\partial z} - \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = 0$$

**e)** Développer cette équation en explicitant $c^2(z)$ obtenu en **I.3.d)**.

### 2. Solution analytique

**a)** En prenant $\gamma = 5/3$, vérifier que l'équation d'évolution de $\rho_1$ admet comme solutions des ondes progressives de la forme générale $\rho_1(z,t) = f\big(t \pm 2z/c(z)\big)$.

*Dans la suite du problème, on conserve* $\gamma = 5/3$.

**b)** $\rho_0(z)$ étant de la forme $z^{\frac{1}{\gamma-1}}$, montrer que $\rho_1$ est nul à la surface. Quelle en est la conséquence pour une onde progressive arrivant en surface ?

**c)** On considère une onde monochromatique de pulsation $\omega$ de la forme $\rho_1(z,t) = F(z)\cos\omega t$. Dans quel type d'onde peut-on la classer ? Expliciter $F(z)$ en désignant par $A_M$ l'amplitude maximale de l'onde.

**d)** En déduire l'expression correspondante de $p_1(z,t)$. Quelle est la particularité que présente en fonction de $z$ l'amplitude de l'onde de pression ?

**e)** Déterminer l'expression de l'onde de vitesse associée $v_1(z,t)$. Quelles particularités observez-vous tant sur sa dépendance temporelle que spatiale ? Montrer que l'amplitude de $v_1$ atteint une limite finie à la surface, en $z = 0$.

### 3. Evolution au voisinage de la surface

**a)** À partir du niveau $z^*$ défini en **I.3.e)**, et jusqu'à des altitudes positives ($z < 0$), l'atmosphère stellaire est supposée isotherme à l'équilibre, et la vitesse des ondes sonores y prend la valeur $c^*$. Écrire l'équation d'évolution de $\rho_1$ valable dans cette zone. Pour des ondes sinusoïdales, montrer qu'il existe une pulsation limite $\omega_{\text{lim}}$ séparant les ondes qui pénètrent dans cette zone de celles qui n'y pénètrent pas. Calculer numériquement $\omega_{\text{lim}}$ et la période $T_{\text{lim}}$ associée.

**b)** Les régions visibles de l'atmosphère stellaire étant au voisinage de $z = z^*$, quel effet physique permet de percevoir le champ de vitesse $v_1$ ? Quel type de mesure permet d'y avoir accès ? Le comportement du champ $v(z)$ est-il favorable à une telle mesure ?

## III. Étude des oscillations dans les couches internes

Dans les couches internes de l'étoile il n'est plus possible de négliger la structure sphérique. On suppose que l'onde est sinusoïdale, localement plane et on admet que la vitesse de phase est donnée par l'expression obtenue en **I.3.d)**, $c^2(z) = (\gamma - 1)gz$ avec $z = R - r$ Pour une étude simple, on utilise une description en termes de « rayons acoustiques ». Pour les applications numériques, on prend $\gamma = 5/3$.

### 1. Réfraction

Par analogie avec l'optique, on définit l'indice acoustique local du milieu comme le rapport de la vitesse du son $c_R$ au centre de l'astre à la vitesse du son locale :

$$n = \frac{c_R}{c(z)}$$

**a)** Rappeler les lois de la réfraction. Montrer qu'elles impliquent, dans le cadre du modèle « plan parallèle » où l'indice n'est fonction que de la coordonnée cartésienne $z$, la conservation de $n \sin i$ où $i$ est l'angle d'incidence. Pour un déplacement élémentaire le long du rayon, exprimer la variation $\mathrm{d}i$ de l'angle d'incidence en fonction de $\mathrm{d}n$, $n$ et $i$.

**b)** Dans une situation à symétrie sphérique, montrer qu'un rayon acoustique se propage en restant dans un plan passant par le centre (plan diamétral).

**c)** De plus, à la variation de l'angle d'incidence calculée ci-dessus et désignée par $\mathrm{d}i_1$, s'ajoute une autre contribution d'origine purement géométrique $\mathrm{d}i_2$. Exprimer $\mathrm{d}i_2$ en fonction de $\mathrm{d}r$, $r$ et $i$.

**d)** Déduire de ces résultats la conservation de la quantité $D = nr \sin i$ le long du rayon acoustique.

**e)** En déduire que la relation précédente implique, sauf dans le cas où $D$ est nul, l'existence d'un niveau limite $r_\mathrm{C}$ en dessous duquel il n'y a plus de propagation verticale de l'onde. Quelle est la direction du rayon acoustique à ce niveau ?

### 2. Trajectoire des rayons acoustiques

**a)** Soit $r = f(\theta)$ l'équation polaire d'un rayon acoustique. À partir des résultats précédemment obtenus, justifier qu'un rayon acoustique associé à une valeur de $D$ fixée est constitué d'arcs successifs contenus dans une couronne de rayons $r_{\min}$ et $r_{\max}$ que l'on identifiera. Que subit le rayon acoustique respectivement en $r = r_{\min}$ et $r = r_{\max}$ ?

**b)** Montrer que, dans la partie **II**, il était justifié de supposer verticale la propagation dans les couches supérieures de l'étoile.

**c)** On pose $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, où $\theta_1$ et $\theta_2$ sont les angles polaires correspondants aux extrémités d'un arc. Un mode correspond à une trajectoire du rayon acoustique fermée sur un tour. $\Delta\theta$ ne peut alors prendre que des valeurs discrètes que l'on déterminera en fonction d'un nombre entier $p$.

**d)** On montre que $\Delta\theta$ ne dépend que du rapport $\alpha = r_\mathrm{C}/R$, soit $\alpha_p$ pour le mode $p$. De plus, en considérant l'aspect ondulatoire de la propagation, un mode correspond à une onde stationnaire présentant des nœuds de $\rho_1$ en surface (cf. **II.2.b**). Soit $\tau_p$ le temps de propagation de la phase de l'onde le long d'un arc du mode $p$ ; $\tau_p$ est donné par $\tau_p = (2R/c_R)\beta_p$ où $\beta_p$ est un facteur numérique ne dépendant que de $\alpha_p$.

Dans ces conditions, montrer qu'au mode $p$ correspondent des ondes stationnaires de diverses périodes sous-multiples d'une période fondamentale $T_p$ ; exprimer $T_p$ en fonction de $\tau_p$.

**e)** Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $\alpha_p$ et de $\beta_p$ pour quelques valeurs de $p$. Calculer les valeurs correspondantes des périodes $T_p$.

| $p$ | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_p$ | 0,459 | 0,645 | 0,737 | 0,791 | 0,827 | 0,886 |
| $\beta_p$ | 1,805 | 1,586 | 1,423 | 1,299 | 1,202 | 1,003 |

**f)** Représenter sur un schéma en coupe de l'intérieur stellaire, l'allure des rayons associés aux modes d'ordre $p = 4$ et $p = 12$. Quels modes fourniront des informations sur la structure du centre de l'astre ? Lesquels seront surtout sensibles aux propriétés des couches périphériques ?

### 3. Les modes radiaux

On définit la fréquence caractéristique des oscillations du Soleil par :

$$\nu_0 = \left(2\int_0^R \frac{dr}{c}\right)^{-1}$$

**a)** D'après la définition de cette fréquence, quel phénomène physique a pour durée la période $T_0 = 1/\nu_0$ ?

**b)** Le profil de la célérité du son étant toujours celui trouvé en partie I), montrer que la valeur de $\nu_0$ est dominée par les couches périphériques de l'astre. Déterminer $\nu_0$ en fonction de $\gamma$, $G$, $M$ et $R$. Calculer la période $T_0$ associée dans le cas du Soleil.

**c)** Montrer que nécessairement, le centre du Soleil correspond pour l'oscillation à un nœud de vitesse. On note $\nu_{n,0}$ la fréquence propre du mode d'oscillation stationnaire présentant radialement $n$ nœuds d'oscillation pour la vitesse (centre exclu).

Une première estimation des modes radiaux consiste à déterminer les pulsations pour lesquelles $\omega \displaystyle\int_0^R \frac{dr}{c(r)} = q\pi + \pi/2$ où $q$ est un entier positif ou nul ; donner une justification de cette expression. Montrer que cette relation donne des modes d'oscillations radiales de fréquences :

$$\nu_{q,0} = (q + 1/2)\nu_0$$

Les modes excités du Soleil qui sont observés ont des périodes voisines de 5 minutes. Quel est l'ordre $q$ moyen de ces modes radiaux ?

* *
*