

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,  
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE  
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,  
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,  
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PC

(Durée de l'épreuve : 3 heures ; l'usage de la calculatrice est autorisé)

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :  
Physique I – Filière PC

*L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 6 pages.*

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il ne faudra pas hésiter à formuler tout commentaire qui vous semblera pertinent. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : Les vecteurs sont notés en gras :  $\mathbf{A}$ . Norme de  $\mathbf{A}$  :  $A$ .

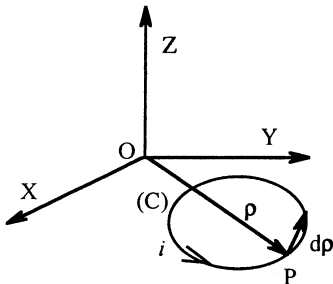
## OSCILLATIONS MÉCANIQUES DE MOMENTS MAGNÉTIQUES

L'épreuve est composée de plusieurs parties largement indépendantes. La partie I est proche du cours. La longueur de l'énoncé ne devrait pas effrayer les candidats.

Les objets dans l'espace seront repérés dans la base cartésienne de vecteurs unitaires  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , ou dans la base sphérique locale, de vecteurs unitaires  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ .

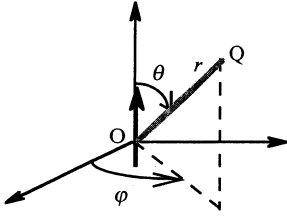
Dans tout le problème, on conviendra de nommer « champ magnétique » le champ noté généralement  $\mathbf{B}$  et qui est, en toute rigueur, le champ dit d'induction magnétique.

### I Sur la notion de moment magnétique



Le circuit orienté fermé et filiforme représenté ci-contre est tout entier situé dans le plan XOY. La normale orientée au circuit est portée par  $\mathbf{e}_z$ , vecteur unitaire de l'axe OZ. On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, de sorte qu'il est possible de définir l'intensité algébrique, notée  $i$ , du courant circulant dans le fil dans le sens convenu. Soit P le point courant du fil ; on note  $\mathbf{OP} = \boldsymbol{\rho}$  et  $d\mathbf{P} = d\boldsymbol{\rho}$ ,  $d\mathbf{P}$  étant un déplacement élémentaire sur le fil. Le moment magnétique du circuit est  $\mathbf{M} = i \oint_{(C)} \frac{\boldsymbol{\rho} \wedge d\boldsymbol{\rho}}{2}$ .

□ 1 – Rappeler l'unité du moment magnétique  $\mathbf{M}$  du circuit. Comment se transforme l'expression de  $\mathbf{M}$  lorsque la distribution de courant est décrite par une densité volumique de courant  $\mathbf{j}(\mathbf{P})$  à l'intérieur d'un volume  $\tau$  ?



□ 2 – Tout point Q de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de pôle O. Soit un moment magnétique  $\mathbf{M}$  placé en O, colinéaire à OZ et de même sens que  $\mathbf{e}_z$ . Ce moment peut être associé à un circuit circulaire situé dans le plan XOY. Vérifier, par analyse des symétries, que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  créé en Q par le moment  $\mathbf{M}$  est situé dans le plan  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ .

□ 3 – Une expression du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  produit au point Q par le moment  $\mathbf{M}$  est  $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_{(C)} \frac{d\mathbf{P}}{PQ}$ . On

convient que le potentiel scalaire  $V$  est nul. Le couple  $(\mathbf{A}, V)$  ainsi déterminé est dit vérifier la condition de jauge de Lorentz. Rappeler le contenu et l'utilité de cette condition. En modélisant le moment magnétique comme celui qui est produit par une spire circulaire de rayon  $a$  parcourue par un courant bien choisi et en utilisant un développement limité de  $1/PQ$  au premier ordre en  $a/r$  montrer que  $\mathbf{A}(\mathbf{Q}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M} \wedge \mathbf{e}_r}{r^2}$ . On rappelle que  $\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi$ .

□ 4 – Comment le champ  $\mathbf{B}(\mathbf{Q})$  se déduit-il, en principe, du vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{Q})$  ? On admettra dans la suite le résultat du calcul :  $\mathbf{B}(\mathbf{Q}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{M}}{r^5}$ . Rappeler l'expression de

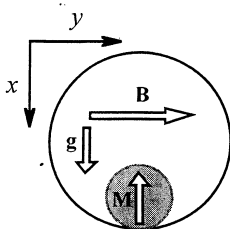
l'énergie potentielle d'un circuit filiforme indéformable parcouru par un courant constant  $I$  et traversé par le flux magnétique  $\Phi$  dû à un champ magnétique permanent. On place le dipôle magnétique  $\mathbf{M}$  en un point O, où le champ magnétique permanent dû à des sources extérieures au dipôle est  $\mathbf{B}(\mathbf{O})$ . Montrer que l'énergie potentielle associée aux forces de Laplace peut s'écrire  $E_p = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{O})$ .

□ 5 – Le dipôle magnétique est considéré comme un solide en rotation autour de O, caractérisée par le vecteur rotation instantanée  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  ; la variation  $d\mathbf{M}$  de  $\mathbf{M}$  pendant  $dt$  est donc  $d\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} dt \wedge \mathbf{M}$ . Exprimer la variation de  $E_p$  et en déduire l'expression du moment en O des actions magnétiques subies par le dipôle :  $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{B}$ . On rappelle la relation vectorielle  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ .

## II Mouvement sur support circulaire d'un disque magnétisé

Dans toute la suite du problème on supposera valide l'expression  $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{B}$ , même si  $\mathbf{B}(\mathbf{O})$  est lentement variable. Pour obtenir un moment magnétique indépendant des conditions qui lui sont imposées on peut utiliser une petite aiguille aimantée (boussole). C'est ce type de moment magnétique que l'on considère dans les applications qui suivent.

On se propose d'étudier le dispositif représenté ci-après. Ce dernier est disposé dans une zone de l'espace où règne un champ de pesanteur uniforme  $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_x$  et un champ  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$  uniforme et situé dans le plan de la figure. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.



Le grand cercle, constitué de matériau isolant, est fixe ; son rayon

est noté  $R$ . Le petit disque, homogène, de centre (géométrique et de masse à la fois)  $G$  et de rayon  $r$ , possède une masse  $m$  et un moment d'inertie  $J = \frac{1}{2}mr^2$  par rapport à un axe perpendiculaire au plan du schéma et passant par  $G$ . Le disque porte un moment magnétique  $\mathbf{M}$ . Le frottement entre le cercle et le disque obéit aux lois de Coulomb ; le coefficient de frottement entre le disque et le cercle est noté  $f$ . Le schéma ci-contre décrit la configuration initiale du dispositif, l'énergie cinétique du disque est nulle. Le champ magnétique est établi instantanément à l'instant initial  $t=0$  et l'on étudie le mouvement du disque, en posant  $\theta = (\mathbf{e}_x, \mathbf{OG})$  et  $\varphi = -(\mathbf{e}_x, \mathbf{M})$ .

## II-1 Mouvement en l'absence de frottement

On suppose dans cette partie que  $f = 0$ . On note pour les fonctions dérivables  $\dot{F} = \frac{dF}{dt}$ .

□ 6 – Rappeler la définition du référentiel barycentrique  $R^*$  du disque ; énoncer le théorème du moment cinétique dans  $R^*$  (on notera  $\sigma^*$  le moment cinétique barycentrique).

□ 7 – Établir, en utilisant le théorème rappelé à la question 6, l'équation différentielle non linéaire du second ordre vérifiée par  $\varphi$ . Retrouver cette équation en utilisant le théorème de la puissance cinétique.

□ 8 – Admettant, éventuellement, que la solution  $\varphi(t)$  est périodique, exprimer la période d'oscillation en fonction de  $\omega_R^2 = \frac{MB}{J}$  ; le résultat fait intervenir  $\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin(\varphi)}} \approx 5,24$ .

□ 9 – Représenter graphiquement l'allure de la trajectoire de phase :  $\dot{\varphi}$  en fonction de  $\varphi$ .

□ 10 – L'abscisse de  $G$  varie-t-elle au cours du mouvement ? Supposant que le contact entre le disque et le cylindre est assuré en permanence, conclure sur la position du point  $G$  pendant le mouvement.

## II-2 Mouvement en présence de frottement

On suppose, dans la suite de cette partie du problème, que  $f$  n'est pas nul.

□ 11 – Le disque roule sans glisser sur le cercle. Écrire la condition cinématique de roulement sans glissement, liant  $R$ ,  $r$ ,  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\theta}$ .

□ 12 – Exprimer, en fonction des données  $m$ ,  $g$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $B$  et de la variable  $\theta$ , l'énergie potentielle  $E_p$  du disque, en adoptant pour sa valeur à l'instant initial  $E_p^{init} = -mg(R-r)$ . La réponse sera mise sous la forme  $E_p = -MB_0 [\cos(\theta) + a \sin(\alpha\theta)]$  et l'on donnera les expressions respectives de  $B_0$  (en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $R$ ,  $r$  et  $M$ ),  $a$  (en fonction de  $B$  et de  $B_0$ ) et  $\alpha$  (en fonction de  $R$  et  $r$ ).

Cas où  $\alpha = 1$  ( $R = 2r$ )

□ 13 – Représenter sommairement et sur la même figure les courbes d'énergie potentielle réduite  $\frac{E_p(\theta)}{MB_0}$  pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$  et, successivement,  $a = 1$  et  $a > 1$ . Déterminer, en fonction

de  $a$ , les positions d'équilibre du disque et leurs stabilités respectives. Considérer le cas limite  $B \rightarrow \infty$ .

□ 14 – Exprimer, à l'équilibre stable, les composantes normale et tangentielle de la réaction exercée par le cercle sur le disque en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $a$ . Quelle est la valeur minimale de  $f$  nécessaire pour que l'équilibre soit possible ?

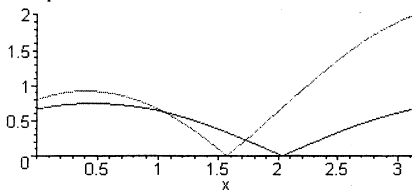
□ 15 – Montrer, en utilisant le théorème de König et la condition de roulement sans glissement, que l'énergie cinétique du disque dans la position courante peut s'exprimer par  $E_{cin} = \frac{1}{2} J_1 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  : donner  $J_1$  en fonction de  $m$  et de  $r$  (ou, si l'on préfère, en fonction seulement de  $J = \frac{1}{2} mr^2$ ).

□ 16 – Justifier la conservation de l'énergie du disque. Décrire comment l'on peut déterminer graphiquement l'intervalle de  $\theta$  accessible au disque.

□ 17 – Établir l'expression de  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  en fonction de  $g$ ,  $r$ ,  $\theta$  et  $a$ . Exprimer, en fonction de  $r$ ,  $g$ ,  $a$  et de la variable  $\theta$ , les composantes normale ( $R_N$ ) et tangentielle ( $R_T$ ) de la réaction du cercle sur le disque.

□ 18 – La figure ci-contre représente  $\alpha_n(\theta) = \frac{f |R_N(\theta)|}{mg}$  et  $\alpha_r(\theta) = \frac{|R_T(\theta)|}{mg}$ , pour  $a=1$  et  $f=0,6$  ; on vérifie au passage que  $\alpha_n(0)=0,8$  et  $\alpha_r(0)=\frac{2}{3}$ . Quelle est la signification du

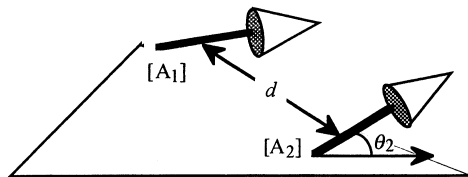
premier point d'intersection de ces deux courbes ? À quoi correspond le point d'intersection de  $\alpha_n(\theta)$  avec l'axe des abscisses ? Quelle est la valeur de l'abscisse correspondante ? Commenter ces deux courbes.



## CROQUETTE

Deux aiguilles aimantées,  $[A_1]$  et  $[A_2]$  de moments magnétiques respectifs  $M_1$  et  $M_2$  sont placées à la distance invariable  $d$  l'une de l'autre. Elles sont horizontales et mobiles sans frottement dans un même plan horizontal autour d'axes verticaux passant par leurs centres de masse respectifs. Les moments d'inertie des aiguilles par rapport à leur axe de rotation sont notés  $J_1$  et  $J_2$ . L'ensemble baigne dans un champ magnétique uniforme et constant  $\mathbf{B}_0$ . Les positions des deux aiguilles sont repérées par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  avec leur position d'équilibre stable dans  $\mathbf{B}_0$ . L'ensemble des deux aiguilles constitue un système de deux oscillateurs couplés régi par le système différentiel, que l'on ne demande pas d'établir :

## III LA BOUSSOLE DE



$$\begin{cases} J_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = -M_1 B_0 \sin(\theta_1) - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1 M_2}{d^3} [\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + 2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)] \\ J_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = -M_2 B_0 \sin(\theta_2) - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1 M_2}{d^3} [\cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + 2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1)] \end{cases} \quad [1]$$

### III –1 Cas des petites oscillations, en présence de frottement

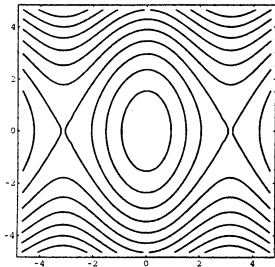
□ 19 – Indiquer les éléments de départ pour l'établissement du système [1]. Relever les symétries de ce système. Linéariser [1] pour les petites oscillations. Les pulsations propres du système linéarisé sont celles pour lesquelles une variation sinusoïdale à la même pulsation  $\omega$  de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est possible. Exprimer les pulsations propres lorsque  $M_1 = M_2$ ,  $J_1 = J_2$  et le champ magnétique créé par  $M_2$  au point  $O_1$  a le même module que  $B_0$  quand  $\theta_2 = 0$  (on pourra, si besoin était, se reporter à la formule donnée à la question 4). On notera les deux pulsations propres  $\omega_+$  et  $\omega_-$  ( $\omega_+ > \omega_-$ ).

□ 20 – Dans le référentiel, galiléen, du laboratoire, l'aiguille  $[A_2]$  est maintenant animée d'un mouvement de rotation uniforme imposé par un moteur. On pose  $\theta_2 = \Omega t$ . L'aiguille  $[A_1]$  est ainsi placée dans un champ magnétique uniforme et permanent et dans un champ magnétique tournant. Hélas pour notre propos, le module de ce dernier n'est pas indépendant du temps. Imaginer un dispositif permettant d'obtenir un champ tournant, sinusoïdal de pulsation  $\Omega$  et de module donné constant  $B_1$ . On utilisera sans doute des paires de Helmholtz<sup>1</sup>.

### III-2 Portrait de phase, en l'absence de frottement

Dans cette section, on néglige tout frottement. On souhaite comprendre la structure du portrait de phase de l'oscillateur constitué par l'aiguille aimantée  $[A_1]$  placée dans les champs  $B_0$  permanent et  $B_1$  tournant. Pour cela on procède par étapes.

□ 21 – Les champs  $B_1$  et  $B_0$  sont tous les deux nuls. Quelle est dans ce cas la nature de la trajectoire de phase  $[\theta = f(\theta)]$  ?



□ 22 – Seul le champ  $B_1$  est nul ( $B_0 \neq 0$ ). Le système est équivalent à un pendule simple. Son portrait de phase a l'allure ci-contre (les valeurs numériques en abscisse et en ordonnée n'ont pas grande importance). À l'intérieur de la séparatrice se trouve un îlot de trajectoires oscillantes que l'on appelle une résonance. Calculer la largeur de la résonance (extension de  $\theta$ ) en fonction de  $M$ ,  $B_0$  et  $J$ . Exprimer cette largeur en fonction de la pulsation propre des petites oscillations d'un oscillateur unique soumis au champ statique  $B_0$ .

□ 23 – Seul le champ  $B_0$  est nul ( $B_1 \neq 0$ ). Quelle est dans ce cas l'allure du portrait de phase ? Un raisonnement simple permet de la déduire de la figure donnée à la question 22.

<sup>1</sup> Une *paire de Helmholtz* est constituée de deux bobines plates identiques circulaires et coaxiales, parcourues dans le même sens par des courants égaux et séparées d'une distance égale à leur rayon. Dans une région voisine du centre du dispositif, le champ  $B$  est quasi uniforme, dirigé suivant l'axe commun aux deux bobines et de sens donné par les règles usuelles.

□ 24 – Le portrait de phase comprend donc deux résonances décalées de  $\Omega$  le long de l'axe des ordonnées et de largeurs respectives  $4\omega_0 = 4\sqrt{\frac{MB_0}{J}}$  et  $4\omega_1 = 4\sqrt{\frac{MB_1}{J}}$ . On admet que si les deux résonances ne se chevauchent pas elles n'ont pas d'influence l'une sur l'autre ; autrement, le système est susceptible d'adopter un comportement chaotique. On note  $S$  le rapport de la somme des demi-largeurs des deux résonances à la distance séparant leurs centres. Exprimer  $S$  en fonction de  $J, M, B_0, B_1$  et  $\Omega$ . Pour quelles valeurs de  $S$  a-t-on recouvrement partiel des résonances ? De quelle manière peut-on agir sur le dispositif pour faire croître  $S$  ?

□ 25 – Revenons à présent sur la trajectoire de phase de la question 21,  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_1 = \mathbf{0}$ . Nous nous intéressons ici aux modifications de cette trajectoire de phase lorsque les champs  $\mathbf{B}_0$  et  $\mathbf{B}_1$  « faibles » sont appliqués. On exprime cette faiblesse par les nouvelles notations  $\mathbf{B}_0 \rightarrow \varepsilon \mathbf{B}_0$  et  $\mathbf{B}_1 \rightarrow \varepsilon \mathbf{B}_1$ . La méthode de perturbations consiste à écrire l'équation différentielle du mouvement sous la forme [2] :

$$\ddot{\theta} = -\varepsilon \frac{MB_0}{J} \sin \theta - \varepsilon \frac{MB_1}{J} \sin(\theta - \Omega t) \quad [2]$$

et à en chercher une solution  $\theta(t)$  sous forme d'une série entière en  $\varepsilon$  :

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \varepsilon \theta_1(t) + \varepsilon^2 \theta_2(t) + \dots$$

On note  $\theta_0(t) = \omega t + \varphi$  la solution de [2] à l'ordre zéro. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par  $\theta_1(t)$  en tenant compte de l'expression de  $\theta_0(t)$  et en ne retenant que les termes du premier ordre en  $\varepsilon$  dans l'équation [2]. On conviendra que  $\theta_1(0) = 0$ . Le spectre de pulsations de  $\theta(t)$  s'est enrichi d'une nouvelle pulsation  $\omega'$ , à déterminer.

□ 26 – L'équation différentielle vérifiée par  $\theta_2(t)$  en tenant compte des expressions de  $\theta_0(t)$  et de  $\theta_1(t)$  et en ne retenant que les termes du second ordre en  $\varepsilon$  dans l'équation [2] fait apparaître les nouvelles pulsations  $\omega + \omega$ ,  $\omega' + \omega'$  et  $|\omega \pm \omega'|$ . Tant qu'aucune pulsation non nulle n'apparaît dans le développement, l'intégration se poursuit paisiblement... et le spectre de  $\theta(t)$  se complique. Si au contraire une pulsation nulle apparaît, un terme constant apparaît dans l'expression de  $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$ . Par intégration,  $\theta(t)$  possède alors un terme variant en  $t^2$ , qui ne reste pas petit. La méthode est alors inadaptée. Pour quelle valeur de  $\omega$ , exprimée en fonction de  $\Omega$ , ce phénomène se présente-t-il dès l'ordre deux du développement en  $\varepsilon$  ?

□ 27 – On nomme nombre de rotation le rapport  $\sigma = \frac{\omega}{\omega'}$  ( $\omega'$  a été déterminé à la question 25). Quelle propriété mathématique doit présenter  $\sigma$  pour que le phénomène d'accrochage en fréquence ne puisse pas se produire, à quelque ordre que ce soit ?

**FIN DE L'ÉPREUVE**