

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS 2004

FILIÈRE MP - OPTION PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR **FILIÈRE PC**

COMPOSITION D'INFORMATIQUE

(Durée : 2 heures)

L'utilisation des calculatrices **n'est pas autorisée** pour cette épreuve.

Le langage de programmation choisi par le candidat doit être spécifié en tête de la copie.

* * *

Compression ternaire

On attachera une grande importance à la concision, à la clarté, et à la précision de la rédaction. On supposera que le langage de programmation utilisé possède deux opérations $x \operatorname{div} y$ et $x \operatorname{mod} y$ donnant le quotient et le reste de la division euclidienne de x par y .

Le temps d'exécution $T(f)$ d'une fonction f est le nombre d'opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division, affectation, etc.) nécessaire au calcul de f . Lorsque ce temps d'exécution dépend d'un paramètre n , il sera noté $T_n(f)$. On dit que la fonction f s'exécute :

- en temps linéaire en n , s'il existe $K > 0$ tel que pour tout n , $T_n(f) \leq Kn$;
- en temps quadratique en n , s'il existe $K > 0$ tel que pour tout n , $T_n(f) \leq Kn^2$.

Nombres ternaires

En base 3, les entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont représentés par 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22. Le chiffre de poids fort de bc est b ; le chiffre de poids faible est c .

Question 1. Écrire la fonction `entier(b, c)` retournant l'entier compris entre 0 et 8 qui s'écrit bc en base 3.

Question 2. Soit x un entier vérifiant $0 \leq x \leq 8$. Écrire une fonction `poidsFort(x)` retournant le chiffre de poids fort de x en base 3. Écrire la fonction `poidsFaible(x)` retournant le chiffre de poids faible de x .

Textes ternaires

Dans ce problème, les textes sont représentés en représentation ternaire. Un savant russe nous a convaincus de la pertinence de ce choix plus compact que la représentation binaire. Un texte est rangé dans un tableau t de N caractères vérifiant $t[i] \in \{0, 1, 2\}$ pour tout i vérifiant $0 \leq i < N - 1$; par ailleurs $t[N - 1] = X > 2$ (le dernier caractère n'est pas ternaire). On suppose $N \geq 1$.

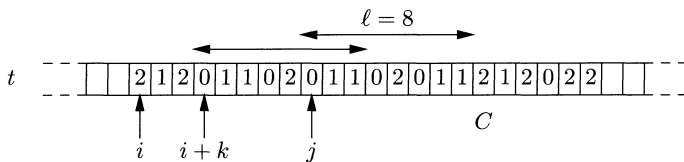
Quelques définitions sont nécessaires : la chaîne de caractères de longueur ℓ démarrante en i est la suite $\langle t[i], t[i + 1], \dots, t[i + \ell - 1] \rangle$. On dira que deux chaînes $\langle t[i], t[i + 1], \dots, t[i + \ell - 1] \rangle$ et $\langle t[j], t[j + 1], \dots, t[j + \ell' - 1] \rangle$ sont égales si $\ell = \ell'$ et $t[i + k] = t[j + k]$ pour $0 \leq k < \ell$.

Question 3. Écrire une fonction `longueurMotif(t, i, j, m)` qui retourne, en temps linéaire par rapport à N , la plus grande longueur ℓ d'une chaîne démarrante en i égale à une chaîne démarrante en j . En outre, cette longueur doit vérifier $\ell \leq m$.

Question 4. On suppose $i < j$. Écrire une fonction `longueurMotifMax(t, i, j, m)` qui retourne, en temps quadratique par rapport à N , la plus grande longueur ℓ d'une chaîne démarrante en $i + k$ égale à une chaîne démarrante en j pour $0 \leq k < m$. En outre, on exige $i + k < j$ et $\ell \leq m$.

On suppose qu'il existe trois variables globales entières A, L, C .

Question 5. Modifier la fonction précédente pour obtenir la fonction `motifMax(t, i, j, m)` qui rend, en temps quadratique, dans L la plus grande longueur ℓ d'une chaîne démarrante en $i + k$ égale à une chaîne démarrante en j pour $0 \leq k < m$; qui rend dans A la valeur de k pour lequel $i + k$ est l'indice de départ de cette chaîne de longueur maximale; qui rend enfin dans C le caractère suivant cette chaîne à partir de j dans t . À nouveau, cette longueur doit vérifier $\ell \leq m$. Et on a $i + k < j$ (cf. l'exemple dans la figure suivante).



Compression

La méthode de compression de Ziv et Lempel, adoptée dans les commandes `zip` ou `gzip`, consiste à repérer les motifs maximaux déjà rencontrés dans un texte et à indiquer pour chacun d'eux le triplet (A, L, C) calculé dans la question précédente entre toute paire d'indices i et j . Pour mesurer le facteur de compression, nous utilisons le même codage pour ces triplets que pour les caractères du texte, c'est-à-dire le système ternaire dans ce problème.

Question 6. Écrire une fonction `imprimerTriplet(A, L, C)` qui imprime les arguments A, L, C sous forme de cinq chiffres consécutifs, les deux caractères ternaires de A , puis les deux caractères ternaires de L , puis le chiffre C , en imposant $0 \leq A < 9$, $0 \leq L < 9$ et $0 \leq C \leq 9$.

On suppose à présent que t contient un long texte ternaire commençant par 9 caractères 0; en outre, t finit par un caractère x spécial ($x > 2$). On déplace sur ce texte une fenêtre de longueur 18. Au début, cette fenêtre est alignée à gauche sur le début du tableau, et on pose $j = 9$. En régime de croisière, la dixième case de la fenêtre correspond à l'entrée j du tableau t . On recherche, dans la partie gauche de la fenêtre, la chaîne de longueur ℓ maximale vérifiant $\ell < 9$ et égale à une chaîne de caractères démarrant en j . On imprime, grâce à la fonction `imprimerTriplet`, le triplet (A, L, C) donné par `motifMax`. Puis, on recentre la fenêtre sur le caractère suivant le caractère d'arrêt C . Ce processus continue jusqu'au bout du tableau t comme indiqué par la figure.

Ainsi pour le texte suivant, on obtient les décompositions de chacune des lignes, soit au total le facteur de compression $30/37$ qui serait nettement meilleur dans une base supérieure à 3 et si la taille de la fenêtre était plus grande que 18 (Il y a en effet 30 caractères dans le résultat et 37 dans le texte d'entrée).

t	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 2 1 0 2 1 0 1 2 1 0 2 1 0 0 2 1 0 2 1 0 0 2 1 0 0 2 1 0 0 x
(0, 0, 1)	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
(0, 1, 2)	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 2
(6, 5, 1)	0 0 0 0 0 0 1 0 2 1 0 2 1 0 1
(2, 6, 0)	1 0 2 1 0 2 1 0 1 2 1 0 2 1 0 0
(2, 8, 1)	0 1 2 1 0 2 1 0 0 2 1 0 0 2 1 0 2 1 0 0 2 1
(5, 2, x)	2 1 0 2 1 0 0 2 1 0 0 x
résultat	0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 2 2 0 1 2 1 0 2 2 0 0 0 2 2 2 1 1 2 0 2 x

Question 7. Écrire une fonction `compresser(t)` qui imprime sur le terminal de sortie le texte compressé par la méthode précédente.

Pour la décompression, on produit d'abord 9 caractères 0. On considère ensuite tous les triplets (A, L, C) représentés par 5 caractères ternaires consécutifs et on recrée la chaîne originale jusqu'au dernier triplet dont la composante C n'est pas comprise entre 0 et 2.

Question 8. Écrire une fonction `décompresser(tc)` qui prend un texte ternaire tc correspondant à du texte compressé et imprime sur le terminal de sortie le texte décompressé correspondant.

* *
*