ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2004

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Courbures des surfaces dans l'espace $\mathbf{R}^3$

Ce problème propose une étude des surfaces de l'espace $\mathbf{R}^3$ et de leurs courbures totale et moyenne. Pour tout entier $n > 0$, l'espace $\mathbf{R}^n$ sera muni de son produit scalaire et de sa norme usuels notés respectivement $(.|.)$ et $\|.\|$. La première partie est consacrée à des préliminaires algébriques.

Première partie

1. Soient $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ des éléments de $\mathbf{R}^{n+1}$, $(x_j^{(i)})_{j=1,\dots,n+1}$ les composantes de $x^{(i)}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$. Pour tout $k = 1, \dots, n+1$ on note V_k le produit par $(-1)^{k+1}$ du déterminant de la matrice $(x_j^{(i)})$ où $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n+1$. On note V le vecteur de $\mathbf{R}^{n+1}$ de composantes V_k.

1.a) Montrer que V est orthogonal à tous les $x^{(i)}$.

1.b) Comparer les conditions suivantes :

i) $V = 0$

ii) la famille $(x^{(i)})_{i=1,\dots,n}$ est liée.

1.c) Exprimer en fonction de $\|V\|$ le déterminant des $n+1$ vecteurs $V, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$.

2.a) Montrer que, pour tout n-uple de vecteurs $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ linéairement indépendants, il existe un unique vecteur $W(x^{(1)}, \dots, , x^{(n)})$ ayant les propriétés suivantes

i) $W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ est de norme 1 et orthogonal à tous les $x^{(i)}$

ii) le déterminant des $n+1$ vecteurs $W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}), x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$ est strictement positif.

2.b) Vérifier que, pour toute rotation R de $\mathbf{R}^{n+1}$, on a

$$W\big(R(x^{(1)}),\dots,R(x^{(n)})\big) = R\big(W(x^{(1)},\dots,x^{(n)})\big)\ .$$

3) Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $\mathbf{R}^n$, Q la matrice de coefficients $q_{i,j} = (e_i|e_j)$.

3.a) Montrer que Q est inversible et diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

3.b) Soit v un vecteur de $\mathbf{R}^n$, de coordonnées v_i dans la base $(e_1,\dots,e_n)$. Exprimer le vecteur ligne $(v_1,\dots,v_n)$ en fonction de Q et du vecteur ligne $\big((v|e_1),\dots,(v|e_n)\big)$.

Dans la suite du problème, on désigne par U une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$, par $u = (u_1,\dots,u_n)$ un élément quelconque de U, par F une application de classe C^2 de U dans $\mathbf{R}^{n+1}$, par $\partial_i F$ (resp. $\partial_i\partial_j F$) ses dérivées partielles d'ordre 1 (resp. 2). On suppose que les n-vecteurs $(\partial_i F)(u)$ sont linéairement indépendants pour tout u, et on pose $W(u) = W\big((\partial_1 F)(u),\dots,(\partial_n F)(u)\big)$.

4.a) Vérifier que l'application $u \mapsto W(u)$ est de classe C^1.

4.b) Comparer $\big((\partial_k W)(u)|(\partial_i F)(u)\big)$ et $\big(W(u)|(\partial_i\partial_k F)(u)\big)$.

4.c) Démontrer l'existence et l'unicité de nombres réels $a_{i,j}(u)$ tels que l'on ait

$$(\partial_i W)(u) = \sum_j a_{i,j}(u)(\partial_j F)(u)\ .$$

4.d) On note respectivement $A(u), S(u), Q(u)$ les matrices de coefficients respectifs $a_{i,j}(u)$, $\big(W(u)|(\partial_i\partial_j F)(u)\big)$, $\big((\partial_i F)(u)|(\partial_j F)(u)\big)$. Vérifier que $A(u) = -S(u)Q(u)^{-1}$.

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, on suppose $n = 2$; on a donc un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ et une application F de classe C^2 de U dans $\mathbf{R}^3$ telle que les vecteurs $(\partial_1 F)(u)$ et $(\partial_2 F)(u)$ soient linéairement indépendants pour tout u de U. On a en outre

$$W(u) = \frac{(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)}{\|(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)\|}$$

où $.\wedge.$ désigne le produit vectoriel dans $\mathbf{R}^3$. On pose

$$K(u) = \det A(u)\ ,\quad H(u) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\ A(u)$$

où $A(u)$ est la matrice définie à la question **4.d**). On note $F_i(u), i = 1,2,3$, les composantes de $F(u)$; on suppose que U contient le point 0 et on fait l'étude de la surface $F(U)$ au voisinage du point $F(0)$.

5. Soit R une rotation de $\mathbf{R}^3$. Montrer que les objets $\hat K(0)$ et $\hat H(0)$ associés à l'application $\hat F = R \circ F$ sont égaux respectivement à $K(0)$ et $H(0)$.

6. On suppose que, pour u suffisamment voisin de $0, F(u)$ est de la forme

$$F(u) = \big(u_1, u_2, f(u_1, u_2)\big)$$

avec $f(0) = (\partial_1 f)(0) = (\partial_2 f)(0) = 0$.

6.a) Calculer $K(0)$ et $H(0)$ en fonction des nombres

$$r = (\partial_1\partial_1 f)(0)\ ,\ s = (\partial_1\partial_2 f)(0)\ ,\ t = (\partial_2\partial_2 f)(0)\ .$$

6.b) (Cas d'un cylindre) On suppose que $f(u_1, u_2)$ est fonction de u_1 seul, soit $f(u_1, u_2) = g(u_1)$. Exprimer $H(0)$ en fonction de la courbure de la courbe Γ, intersection du cylindre avec le plan $x_2 = 0$.

7.) Dans cette question, on considère le cas d'une surface de révolution :

$$F(u) = \big(f(u_1)\cos u_2\ ,\ f(u_1)\sin u_2\ ,\ u_1\big)$$

où f est une fonction strictement positive de classe C^2 définie sur un intervalle I.

7.a) Dire pour quelles valeurs de u les vecteurs $(\partial_1 F)(u)$ et $(\partial_2 F)(u)$ sont linéairement indépendants.

7.b) Vérifier que

$$A(u) = f(u_1)^{-1}\big(1 + f'(u_1)^2\big)^{-3/2}\begin{pmatrix} f(u_1)f''(u_1) & 0 \\ 0 & -\big(1 + f'(u_1)^2\big)\end{pmatrix}\ .$$

7.c) Donner une fonction f élémentaire pour laquelle $H(u)$ est nul pour tout u.

7.d) Montrer que, pour tous nombres réels α et $\beta, \alpha > 0$, il existe f satisfaisant

$$H(u) = 0 \text{ pour tout } u\ ,\ f(0) = \alpha\ ,\ f'(0) = \beta\ .$$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

7.e) Calculer $K(u)$ pour une telle fonction f.

8.) Indiquer, sans aucun calcul, des surfaces pour lesquelles $K(u)$ et $H(u)$ sont des constantes.

Troisième partie

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'effet d'un changement de paramétrage sur les fonctions H et K.

Dans la situation du début de la deuxième partie on note $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ la matrice (jacobienne) de coefficients $\big(\dfrac{\partial F}{\partial u}\big)_{i,j} = \partial_j F_i$. Notation analogue pour $\dfrac{\partial W}{\partial u}$.

9. Vérifier que $\dfrac{\partial W}{\partial u} = \dfrac{\partial F}{\partial u}\ {}^t A(u)$.

On se donne maintenant un difféomorphisme Φ de U sur un autre ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbf{R}^2$ et on pose $\Psi = \Phi^{-1}$. Pour tout $u \in U$ on écrira aussi $\tilde{u} = \Phi(u)$; on pose $\tilde{F}(\tilde{u}) = F(u)$, c'est-à-dire $\tilde{F} = F \circ \Psi$, et on note $\tilde{W}(\tilde{u}), \tilde{A}(\tilde{u}), \tilde{K}(\tilde{u}), \tilde{H}(\tilde{u})$ les objets définis à partir de $\tilde{F}$ et $\tilde{u}$ comme $W(u), A(u), K(u), H(u)$ l'ont été à partir de F et u. On suppose U connexe par arcs.

10.a) Exprimer $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$, puis $(\partial_1 \tilde{F})(\tilde{u}) \wedge (\partial_2 \tilde{F})(\tilde{u})$ en fonction de $(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)$ et dét $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

10.b) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{1, -1\}$ tel que l'on ait $\tilde{W}(\tilde{u}) = \varepsilon W(u)$ pour tout $u \in U$.

10.c) Exprimer $\tilde{A}(\tilde{u})$ en fonction de $\varepsilon, A(u)$ et $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

10.d) Comparer $\tilde{H}(\tilde{u})$ et $H(u), \tilde{K}(\tilde{u})$ et $K(u)$.

* *
*