ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE ANNEE 2003

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Le sujet comprend :

- 1 page de garde,
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 7 pages de texte, numérotées de 1 à 7.

CALCULATRICE AUTORISEE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

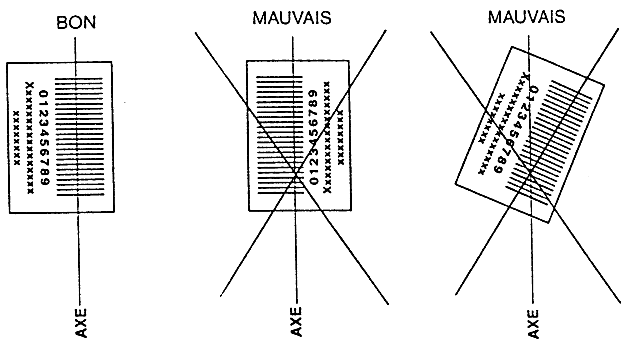
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 30 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
Chaque candidat devra choisir au plus 25 questions parmi les 30 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 25 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 25 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 30, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 31 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 30, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

- soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

- soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.

- soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
vous devez alors noircir la case E.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

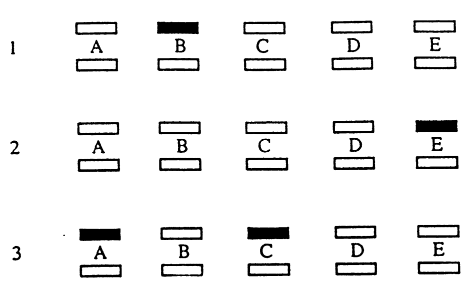
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



Questions liées : 1 à 14
15 à 19
et 20 à 30

PARTIE I

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et E_1 l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, sous espace vectoriel de E. Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. A toute fonction f appartenant à E_1 on associe la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_0^x \varphi(t)f(t)dt$$

On définit ainsi une application L_φ de E_1 dans E $L_\varphi : f \to g$

Question 1 : φ étant donnée, pour que g appartienne à $\mathrm{Im}L_\varphi$, la fonction g doit vérifier, dans le cas où φ ne s'annule pas

a) g continue

b) $\dfrac{g'}{\varphi} \in E_1$

dans le cas où φ s'annule

c) $g = 0$

d) g' s'annule aux zéros de φ et $\dfrac{g'}{\varphi}$ est prolongeable par continuité en ces points.

Question 2 : Dans le cas où $\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$ et $g(x) = e^x - x - 1$ la fonction g

a) ne vérifie pas les conditions nécessaires de la question 1

b) vérifie les conditions nécessaires de la question 1

et dans le cas où $\varphi(x) = \ln(1 + x + x^2)$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ la fonction g

c) vérifie les conditions nécessaires de la question 1

d) ne vérifie pas les conditions nécessaires de la question 1

Question 3 : La fonction φ étant fixée, la fonction f est reliée à la fonction g par :

a) $f = \dfrac{g}{\varphi}$

b) $f(x) = \dfrac{g(x)}{\int_0^x \varphi(t)dt} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) $f = \dfrac{g'}{\varphi}$

d) $f(x) = \dfrac{g'(x)\int_0^x \varphi(t)dt - g(x)\varphi(x)}{\left(\int_0^x \varphi(t)dt\right)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On considère le cas particulier où les fonctions φ et g sont définies respectivement par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \ln(1 + x + x^2) \text{ et } g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

et on note f la fonction de E_1 telle que $g = L_\varphi(f)$, si elle existe.

Question 4 : La fonction f
a) n'est pas prolongeable par continuité en 0
b) est prolongeable par continuité en 0 par 1
c) est prolongeable par continuité en 0 par 0
d) est prolongeable par continuité en 0 par -1

Question 5 : Le graphe de la fonction f, dans un repère orthonormé, est symétrique par rapport
a) au point (1, f(1)) b) au point $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ c) à la droite x =1 d) à la droite $x = \frac{1}{2}$

Question 6 : Sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ la fonction f est :
a) croissante puis décroissante b) décroissante c) croissante d) monotone

Question 7 : La limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$
a) n'existe pas b) vaut zéro
et la courbe admet
c) une asymptote d) une branche infinie parabolique.

Question 8 : L'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point(0, f(0)) s'écrit
a) $y = 1 - \frac{x}{2}$ b) $y = 1 + x$ c) $y = 1 + \frac{x}{2}$ d) $y = x$

On revient au cas général où φ est une fonction fixée continue sur $\mathbb{R}$.
On note Φ la primitive de la fonction φ s'annulant en x = 0

Question 9 : Les fonctions f et g vérifient $g = L_\varphi(f)$ et $g - f = \Phi$

a) $\begin{cases} f(x) = 1 + 2e^{\Phi(x)} \\ g(x) = \Phi(x) + 1 + 2e^{\Phi(x)} \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$ b) $\begin{cases} f(x) = 1 - e^{\Phi(x)} \\ g(x) = 1 - e^{\Phi(x)} + \Phi(x) \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} f(x) = 1 + \ln|\Phi(x)| \\ g(x) = \Phi(x) + 1 + \ln|\Phi(x)| \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$ d) $\begin{cases} f(x) = 1 + \Phi(x) \\ g(x) = 2\Phi(x) + 1 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

Dans toute la suite de cette partie, la fonction φ considérée sera définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}\ \varphi(x) = e^x$.
On considère l'espace vectoriel E_3, sous-espace vectoriel de E_1, constitué des fonctions f telles que $f(x) = a\cos x + b\sin x$ où a et b sont des réels quelconques.

Question 10 : La famille de fonctions suivantes forme une base de l'espace $L_\varphi(E_3)$

a) $\begin{cases} g_1(x) = \cos x \\ g_2(x) = \sin x \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} v_1(x) = e^x \dfrac{\sin x - \cos x}{2} + \dfrac{1}{2} \\ v_2(x) = e^x \dfrac{\sin x + \cos x}{2} - \dfrac{1}{2} \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} w_1(x) = 1 \\ w_2(x) = e^x \sin x \ \forall x \in \mathbb{R} \\ w_3(x) = e^x \cos x \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1(x) = e^x \cos x - 1 \\ u_2(x) = e^x \sin x \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

Question 11 : Reprenant les notations de la question 10 et l'espace vectoriel E_3 étant rapporté à la base (f_1, f_2) avec $f_1(x) = \cos x$ et $f_2(x) = \sin x$, la matrice $\begin{pmatrix} C & -C \\ C & C \end{pmatrix}$, où C est une constante donnée, représente matriciellement la restriction de L_φ à l'espace E_3lorsque $L_\varphi(E_3)$ est rapporté à la base :

a) (g_1, g_2) b) (v_1, v_2) c) (u_1, u_2) d) (w_1, w_2, w_3)

n étant un entier donné, on désigne par $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On considère les fonctions $u_0(x) = e^x - 1$, $u_1(x) = xe^x$, ……., $u_n(x) = x^n e^x$

Question 12 : Pour p entier naturel, la fonction g_p image par L_φ de la fonction $f_p(x) = x^p$ vérifie :

a) $g_0 = -u_0$ b) $g_0 = u_0$ c) $g_p = -u_p$ d) $g_p = u_p - p\, g_{p-1}\ \forall p \in \mathbb{N}^*$

Question 13 : Pour $p \in \mathbb{N}$ la fonction g_p définie à la question 12 s'écrit, A_p^{p-k} désignant le nombre d'arrangements de (p-k) éléments parmi p éléments :

a) $g_p = u_p - u_{p-1}\ \forall p \in \mathbb{N}^*$

b) $g_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} A_p^{p-k} u_k + (-1)^p$

c) $g_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} A_p^{p-k} u_k$

d) $g_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} p!\, u_k + (-1)^p$

Question 14 : La matrice de la restriction de l'application L_φ à $\mathcal{P}_n$ par rapport à la base canonique de $\mathcal{P}_n$ et à la base $(u_0, \ldots\ldots, u_n)$ de $L_\varphi(\mathcal{P}_n)$ est

a) carrée d'ordre (n+1) et diagonale
b) triangulaire supérieure et carrée d'ordre n
c) inversible car de déterminant égal à $(-1)^{n+1}$
d) de déterminant égal à 1 donc de rang n.

PARTIE II

Soit P le polynôme à coefficients réels à une indéterminée X défini par
$$P = 26 - 34X + 23X^2 - 6X^3 + X^4$$

Question 15 : Le système d'équation : $\begin{cases} -4x^4 + 12x^3 - 34x + 26 = 0 \\ -12x^3 + 46x^2 - 34x = 0 \end{cases}$ a pour solution :

a) $x = \dfrac{17}{6}$ b) $x = 2$ c) $x=0$ d) $x=1$

Question 16 : Le nombre complexe z_1 est racine du polynôme P :

a) $z_1 = \dfrac{17}{6}(1 + i)$ b) $z_1 = 1 - i$ c) $z_1 = 2(1 + i)$ d) $z_1 = \dfrac{17}{6}(1 - i)$

Question 17 : Le polynôme P est divisible par le polynôme Q défini par :

a) $Q = 13 - 2X + X^2$ b) $Q = 13 - \dfrac{17}{3}X + X^2$

c) $Q = 13 - 4X + X^2$ d) $Q = \dfrac{189}{18} - \dfrac{17}{3}X + X^2$

Question 18 : La fraction rationnelle $\dfrac{1}{P(x)}$ se décompose en éléments simples sur le corps des réels sous la forme :

a) $\dfrac{1}{85}\left(\dfrac{2x + \dfrac{7}{36}}{x^2 - \dfrac{17}{3}x + \dfrac{189}{18}} - \dfrac{x - \dfrac{5}{18}}{x^2 - 4x + \dfrac{368}{189}}\right)$

b) $\dfrac{1}{85}\left(\dfrac{2x + 7}{x^2 - 2x + 2} - \dfrac{2x + 3}{x^2 - 4x + 13}\right)$

c) $\dfrac{1}{36}\left(\dfrac{3x + 2}{x^2 - \dfrac{17}{3}x + 13} + \dfrac{3}{(x - 4)^2} - \dfrac{1}{x - 4}\right)$

d) $\dfrac{1}{85}\left(\dfrac{2x + 3}{x^2 - 2x + 2} - \dfrac{2x + 7}{x^2 - 4x + 13}\right)$

Question 19 : A étant un réel positif fixé, l'intégrale $I = \int_0^A \frac{1}{P(x)}dx$ vaut :

a) $I = \frac{1}{85}\left[\ln\left(\frac{A^2 - \frac{17}{3}A + \frac{189}{18}}{A^2 - 4A + \frac{368}{189}}\right) + \frac{3}{18}\text{Arctan}\left(A - \frac{17}{6}\right) - \frac{5}{9}\right]$

b) $I = \frac{1}{36}\left[\ln\left(\frac{\left(A^2 - \frac{17}{3}A + 13\right)^{\frac{3}{2}}}{A - 4}\right) + 2\,\text{Arctan}\left(A - \frac{17}{6}\right) - \frac{3}{A - 4}\right]$

c) $I = \frac{1}{85}\left[\ln\left(\frac{A^2 - 4A + 13}{A^2 - 2A + 2}\right) - 9\,\text{Arctan}(A-1) + \frac{7}{13}\text{Arctan}\frac{A-2}{3} - \frac{9\pi}{4} + \frac{7}{13}\text{Arctan}\frac{2}{3} + \ln\frac{2}{13}\right]$

d) $I = \frac{1}{85}\left[\ln\left(\frac{A^2 - 2A + 2}{A^2 - 4A + 13}\right) + 9\,\text{Arctan}(A-1) - \frac{7}{3}\text{Arctan}\frac{A-2}{3} + \frac{9\pi}{4} - \frac{7}{3}\text{Arctan}\frac{2}{3} - \ln\frac{2}{13}\right]$

PARTIE III

Soit f la fonction de la variable réelle définie par f(0) = 0, ; f(1) = -1 ; f(-1) = 1
et $\forall t \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ $f(t) = \frac{2t}{1 - t^2}\ln|t|$

Question 20 : La courbe représentant f dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy est symétrique par rapport :
a) au point (0, 0) car f est paire
b) au point (1, -1)
c) à la droite x = 0 car f est impaire
d) à la droite y = 0

Question 21 : La fonction f
a) est continue sur $\mathbb{R}$ car une fonction définie en tout point de $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$
b) n'est pas continue en 0 car ln n'est pas définie en 0
c) est continue sur $\mathbb{R}$
d) est continue sur $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

Question 22 : La limite de f(t) lorsque t tend vers $-\infty$
a) n'existe pas
b) est nulle
c) est égale à $-\infty$
d) est égale à $+\infty$

Question 23 : Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire $f\left(\frac{1}{t}\right)$ sous la forme

a) $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{f(t)}$
b) $f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t)$
c) $f\left(\frac{1}{t}\right) = -f(t)$
d) $f(\frac{1}{t}) = \frac{2}{t\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)}\ln\left|\frac{1}{t}\right|$

Question 24 : La limite lorsque t tend vers 0, de la fonction $\frac{1}{t}f(t)$

a) est nulle et la courbe est tangente à l'axe x'Ox au point (0, 0)
b) est égale à $+\infty$
c) est égale à $-\infty$
d) n'existe pas

Question 25 : Le développement limité à l'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction $t \mapsto t\ln t$ au voisinage de 1 s'écrit, la fonction $\varepsilon(t)$ tendant vers 0 lorsque t tend vers 1

a) $t(t-1) - \frac{t(t-1)^2}{2} + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1}\frac{t(t-1)^n}{n} + (t-1)^n\varepsilon(t)$

b) $t^2 - \frac{t^3}{3} + \dots\dots\dots + (-1)^n\frac{t^n}{n-1} + t^n\varepsilon(t)$

c) $t(t-1) + \frac{t(t-1)^2}{2} + \dots\dots\dots + \frac{t(t-1)^n}{n} + (t-1)^n\varepsilon(t)$

d) $(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} + \dots\dots\dots + (-1)^n\frac{(t-1)^n}{n(n-1)} + (t-1)^n\varepsilon(t)$

Question 26 : Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction $\frac{f(t)+1}{t-1}$ est

a) $1 + \frac{t}{6} - t^2$

b) $t + t^2$

c) $\frac{t-1}{6} - \frac{(t-1)^2}{6} + (t-1)^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 1}\varepsilon(t) = 0$

d) $\frac{t-1}{6} + (t-1)^2$

Question 27 : La fonction f est

a) dérivable sur $\mathbb{R}^*$
b) dérivable sur $\mathbb{R}$ car continue sur tout point de $\mathbb{R}$
et a pour dérivée si elle existe

c) $f'(t) = \frac{2t(1+t^2)}{|t|(1-t^2)}\ln|t| + \frac{2}{1-t^2}$ pour $t \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$ et $f'(1) = 0 = -f'(-1)$

d) $f'(t) = \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}\left[\ln|t| + \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}\right]$ pour $t \in \mathbb{R}^* - \{-1,1\}$ et $f'(1) = 0 = f'(-1)$

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = \ln t + \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Question 28 : On a

a) $\varphi'(t) > 0\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*$

b) $\varphi'(t) > 0\ \forall t \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et $\varphi'(1) = 0$

c) φ est croissante puis décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

d) φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Question 29 : La fonction f' est

a) positive sur $]0, 1[$ et négative sur $]1, +\infty[$ car il en est de même de φ

b) négative sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$ car de même signe que φ

et la fonction f est

c) négative sur $\mathbb{R}$

d) négative ou nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et positive ou nulle sur $]-\infty, 0[$

Question 30 : Soit g la fonction de la variable réelle définie par $g(x) = \tan(2x) \ln|\tan x|$. On a

a) g est définie sur $\mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{4}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$; paire et π-périodique

b) g est définie sur $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$; impaire et 2π-périodique

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = 0$ car $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$

d) g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$