ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PSI

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PSI.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit I le segment d'extrémités 0 et 1 : $I = [0,1]$; dans tout ce problème h et f sont des fonctions réelles données définies et continues sur la droite réelle $\mathbb{R}$. Soit (**E**) l'équation différentielle suivante :

$$(\mathbf{E}) \qquad -y''(x) + h(x)\,y(x) = f(x),$$

où la fonction y est une fonction inconnue définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$.

Le but de ce problème est d'étudier les solutions de cette équation différentielle (**E**) qui vérifient les conditions "aux limites" suivantes : la solution y recherchée est nulle en chacune des extrémités 0 et 1 de l'intervalle I.

Les fonctions h et f étant des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$, soit (**S**) le système constitué de l'équation différentielle (**E**) et des équations exprimant la nullité de la solution y aux extrémités 0 et 1 de l'intervalle I :

$$(\mathbf{S}) \quad \begin{cases} -y''(x) + h(x)\,y(x) = f(x), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Une fonction y, définie sur $\mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant les équations du système (**S**) est dite solution du système (**S**).

Première partie

La fonction h est égale à une constante et la fonction f est nulle :

1. Démontrer que, lorsque la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, est égale à une constante réelle α ($h(x) = \alpha \in \mathbb{R}$) et la fonction f est nulle ($f(x) = 0$), la seule solution y du système (S) est la fonction nulle $\big(y(x) = 0$ pour tout $x\big)$, sauf pour certaines valeurs du réel α qui seront précisées ; poser $\alpha = \omega^2$ ou $\alpha = -\omega^2$ ($\omega > 0$), suivant que le réel α est strictement positif ou strictement négatif.

Une expression de la solution du système (S) :

Un résultat préliminaire : soit φ une fonction réelle définie et continue sur la droite réelle $\mathbb{R}$; soit Φ la fonction définie par la relation suivante :

$$\text{pour tout réel } x, \quad \Phi(x) = (1-x)\int_0^x t\,\varphi(t)\,dt + x\int_x^1 (1-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

2. Démontrer que la fonction Φ est définie et de classe C^2 sur toute la droite réelle $\mathbb{R}$; déterminer sa dérivée seconde Φ'' ainsi que les valeurs prises par la fonction Φ en 0 et en 1 : $\Phi(0)$, $\Phi(1)$.

3. Démontrer que, si Φ_1 est une fonction réelle, deux fois dérivable sur la droite réelle $\mathbb{R}$, telle qu'elle vérifie les relations suivantes :

$$\text{pour tout réel } x, \quad \Phi_1''(x) = -\varphi(x),\ \Phi_1(0) = 0,\ \Phi_1(1) = 0,$$

les fonctions Φ et Φ_1 sont égales ($\Phi_1 = \Phi$).

4. En déduire, lorsque la fonction h est nulle, l'existence et l'unicité d'une solution y du système ($\mathbf{S}_0$) suivant :

$$(\mathbf{S}_0) \quad \begin{cases} -y''(x) = f(x), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Une condition sur la fonction h lorsque la fonction f est nulle :

La fonction f est supposée nulle ($f = 0$) ; le système (S) s'écrit,

$$(\mathbf{S}_1) \quad \begin{cases} -y''(x) + h(x)\,y(x) = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

5. Démontrer que, pour qu'une fonction y, définie et continue sur la droite réelle $\mathbb{R}$, vérifie le système ($\mathbf{S}_1$), il faut et il suffit que la fonction y vérifie, pour tout réel x, la relation (**R**) suivante :

$$(\mathbf{R}) \quad \text{pour tout réel } x, \quad y(x) = (x-1)\int_0^x t\,h(t)\,y(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)\,h(t)\,y(t)\,dt.$$

6. Démontrer l'existence de deux réels H et Y respectivement maximums des valeurs absolues des fonctions h et y sur le segment $I = [0,1]$.

7. Soit y une solution du système ($\mathbf{S}_1$) ; démontrer, pour tout réel x appartenant au segment I ($0 \leq x \leq 1$), l'inégalité suivante :

$$|y(x)| \leq \frac{H\,Y}{8}.$$

8. En déduire une condition nécessaire sur la fonction h, pour qu'il existe des solutions y, autres que la fonction nulle, du système $(\mathbf{S}_1)$. Vérifier que, lorsque la fonction h est constante, cette condition est remplie lorsqu'il y a des solutions différentes de 0.

Seconde partie

Rappel : une fonction f, réelle, définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$, est dite 2-périodique si et seulement si : pour tout réel x, $f(x+2) = f(x)$. Les coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, $n \geq 1$, sont définis par les relations suivantes :

$$\text{pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } 1, \quad a_n(f) = \int_0^2 f(t) \cos\left(n\,\pi\, t\right) dt, \; b_n(f) = \int_0^2 f(t) \sin\left(n\,\pi\, t\right) dt.$$

Le but de cette seconde partie est de résoudre l'équation différentielle suivante

$$(\mathbf{F}) \qquad -y''(x) + h(x)\, y(x) = f(x),$$

où h et f sont des fonctions définies sur la droite réelle, continues, impaires, 2-périodiques. La fonction inconnue y est supposée impaire, elle aussi 2-périodique, mais en plus deux fois continûment dérivable et vérifiant les conditions aux limites suivantes sur le segment I : elle est nulle en 0 et en 1.

Lorsque la fonction y, impaire 2-périodique, deux fois continûment dérivable, vérifie l'équation différentielle $(\mathbf{F})$ et les conditions aux limites définies ci-dessus, elle est dite solution du système $(\mathbf{T})$ suivant :

$$(\mathbf{T}) \qquad \begin{cases} -y''(x) + h(x)\, y(x) = f(x), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Soit G la fonction définie dans le carré $I \times I$ par la relation suivante :

$$(x,t) \mapsto G\left(x,\, t\right) \begin{cases} t\,(1-x), \text{ si } 0 \leq t \leq x, \\ x\,(1-t), \text{ si } x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Étant donné un réel x fixé du segment I, soit $\widetilde{G}_x$ la fonction impaire, 2-périodique, égale à $G\left(x,\, t\right)$ pour tout réel t appartenant au segment I :

$$\forall t \in I, \quad \widetilde{G}_x(t) = G\left(x,\, t\right).$$

Développement en série de Fourier de la fonction $\widetilde{G}_x$:

9. Tracer le graphe de la restriction de la fonction $\widetilde{G}_x$ au segment $\left[-1,\; 1\right]$. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $\widetilde{G}_x$.

10. Y a-t-il égalité, pour tout réel t, entre $\widetilde{G}_x(t)$ et la somme de la série de Fourier obtenue ? Préciser et vérifier la nature de la convergence.

11. En déduire que la fonction $G : \left(x,\, t\right) \mapsto G\left(x,\, t\right)$ est, dans le carré $I \times I$, la somme d'une série de fonctions uniformément convergente.

Solution du système (T) lorsque la fonction *h* est nulle :

12. Démontrer, lorsque la fonction h est nulle, qu'il existe une seule solution possible z au système (**T**). Préciser son expression à l'aide de la fonction G.

13. Déterminer, lorsque la fonction h est nulle, le développement en série de Fourier de la fonction z ; exprimer les coefficients de Fourier de la fonction z à l'aide de ceux de f. En déduire l'existence d'une solution au système (**T**).

14. Exemple : la fonction h est nulle, f est la fonction impaire, 2-périodique, définie sur le segment I par la relation suivante

$$f(t) = \begin{cases} t, \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ 1-t, \text{ si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Déterminer le développement en série de Fourier de la solution f puis celui de la fonction u solution du système (**T**). Est-ce que le développement en série de Fourier de la fonction u obtenu est celui d'une fonction deux fois continûment dérivable ?

La fonction *h* est une constante :

La fonction h est supposée dans la suite égale à une constante a différente de 0 ($a \neq 0$). La fonction f est toujours une fonction impaire, 2-périodique. Le but de cette question est de rechercher une solution du système

$$(\mathbf{T}_a) \qquad \begin{cases} -y''(x) + a\,y(x) = f(x), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

La méthode proposée consiste à écrire ce système sous la forme suivante :

$$(\mathbf{T}'_a) \qquad \begin{cases} -y''(x) = f(x) - a\,y(x), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

et à considérer que la fonction $x \mapsto f(x) - a\,y(x)$ joue le même rôle que celui joué par la fonction f aux questions 12 et 13.

15. En supposant qu'il existe une solution z au système ($\mathbf{T}_a$), déterminer les relations que doivent vérifier les coefficients de Fourier de la fonction z.

16. Discuter suivant les valeurs du réel a l'existence de solutions des équations vérifiées par les coefficients de Fourier de la fonction z.

17. Démontrer, lorsque les équations donnant les coefficients de Fourier de la fonction z admettent des solutions et que la fonction f est de classe $\mathbf{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, l'existence d'une fonction z solution du système ($\mathbf{T}_a$).

18. Exemple : Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction z lorsque la fonction f est la fonction définie à la question 14.

FIN DU PROBLÈME