SESSION 2003 PSIM105

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Dans tout ce problème, on désigne par μ une application continue 2π - périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et on considère l'équation différentielle :

$$(E_\mu) \qquad y'' + y = \mu(t)$$

On désigne par φ_μ la solution sur $\mathbf{R}$ de (E_μ) qui vérifie en outre les relations $\varphi_\mu(0) = \varphi'_\mu(0) = 0$.
Pour $x \in \mathbf{R}$, on note :

$$G_\mu(x) = \int_0^x \mu(t)\cos t\, dt \qquad \text{et} \qquad H_\mu(x) = \int_0^x \mu(t)\sin t\, dt$$

Dans la partie I, on étudie quelques propriétés de la fonction φ_μ. Dans la partie II et la partie III, on étudie un exemple explicite.

PARTIE I

On désigne par F_μ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $F_\mu(x) = (\sin x)\, G_\mu(x) - (\cos x)\, H_\mu(x)$.
Pour simplifier les notations, on écrira F, G, H, φ pour désigner les fonctions F_μ, G_μ, H_μ, φ_μ.

I.1 Justifier la dérivabilité de G, H et donc F. Préciser $F(0)$ et $F'(0)$.

I.2 Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et exprimer $F''(x) + F(x)$ en fonction de $\mu(x)$.

I.3 Justifier l'affirmation $F = \varphi$.

I.4 **Etude du caractère 2π - périodique de φ.**

I.4.1 Calculer la dérivée de $G(x + 2\pi) - G(x)$ et $H(x + 2\pi) - H(x)$.

I.4.2 Exprimer $G(x + 2\pi) - G(x)$ en fonction de $G(2\pi)$
et $H(x + 2\pi) - H(x)$ en fonction de $H(2\pi)$.

I.4.3 Exprimer $\varphi(x + 2\pi) - \varphi(x)$ en fonction de $\sin x$, $\cos x$, $G(2\pi)$, $H(2\pi)$.

I.4.4 A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $G(2\pi)$ et $H(2\pi)$ la fonction φ est-elle 2π - périodique ?

I.4.5 La fonction φ est-elle 2π - périodique lorsque $\mu(t) = \sin t$? (resp. lorsque $\mu(t) = \cos t$?)

I.4.6 La fonction φ est-elle bornée lorsque $\mu(t) = \sin t$? (resp. lorsque $\mu(t) = \cos t$?)

I.4.7 Montrer que la fonction φ est 2π - périodique lorsque $\mu(t) = |\sin t|$.

I.4.8 Les fonctions φ, φ', et φ'' sont-elles bornées lorsque $\mu(t) = |\sin t|$?

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\mu(t) = |\sin t|$.

PARTIE II

Calcul de $\int_{\mathbf{R}+} e^{-t}\varphi(t)\,dt$

II.1 Justifier l'intégrabilité sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $t \mapsto e^{-t}|\sin t|$.

II.2 Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}|\sin t|\ dt$.

II.2.1 Calculer v_0.

II.2.2 Montrer qu'il existe un nombre réel ρ (que l'on explicitera) tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $v_n = \rho^n v_0$.

II.2.3 En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

II.2.4 En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}+} e^{-t}|\sin t|\ dt$.

II.3

II.3.1 Déduire des résultats obtenus dans la partie I (en particulier de **I.4.8**) que les fonctions $t \mapsto e^{-t}\varphi(t)$, $t \mapsto e^{-t}\varphi'(t)$ et $t \mapsto e^{-t}\varphi''(t)$ sont intégrables sur $\mathbf{R}_+$.

II.3.2 Etablir une relation entre $\int_{\mathbf{R}+} e^{-t}\mu(t)\,dt$ et $\int_{\mathbf{R}+} e^{-t}\varphi(t)\,dt$.

En déduire $\int_{\mathbf{R}+} e^{-t}\varphi(t)\,dt$.

PARTIE III

Développement de Fourier des fonctions μ et φ.

Si f est une application continue 2π - périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on désigne par $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier réels de f :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ \cos(nt)\ dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ \sin(nt)\ dt \quad \text{pour } n \in \mathbf{N}.$$

Lorsqu'elle converge, on désigne par $SF_f(t)$ la somme de la série de Fourier :

$$SF_f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\ \cos(nt) + b_n(f)\ \sin(nt).$$

III.1

III.1.1 Justifier la convergence de la série de Fourier de la fonction μ **(rappel :** $\mu(t)=|\sin t|$**).**

III.1.2 Justifier la convergence de la série de Fourier de la fonction φ **(rappel :** $\varphi''(t)+\varphi(t)=|\sin t|$, $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$**).**

III.2 Série de Fourier de la fonction μ.

III.2.1 Calculer les coefficients $a_n(\mu)$ pour $n\in\mathbf{N}$. Quelle est la valeur des coefficients $b_n(\mu)$ pour $n\in\mathbf{N}^*$?

III.2.2 Etablir la convergence de la série $\sum_{p\geq 1}\frac{1}{(4p^2-1)}$ et expliciter sa somme $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}$.

III.2.3 Etablir la convergence de la série $\sum_{p\geq 1}\frac{1}{(4p^2-1)^2}$ et calculer sa somme $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2}$.

III.3 Série de Fourier de la fonction φ.

III.3.1 Etudier la parité des fonctions G, H puis celle de la fonction φ. Quelle est la valeur des coefficients $b_n(\varphi)$ pour $n\in\mathbf{N}^*$?

III.3.2 Etablir une relation entre $a_n(\varphi'')$ et $a_n(\varphi)$ pour $n\in\mathbf{N}$.

III.3.3 En déduire la valeur de $a_n(\varphi)$ pour $n\neq 1$.

III.3.4 Calculer $a_1(\varphi)$.

III.4 On considère la série $\sum_{p\geq 1}\frac{1}{(4p^2-1)(16p^4-1)}$. Justifier la convergence de cette série et expliciter sa somme $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)(16p^4-1)}$ en calculant l'intégrale du **II** par un autre procédé qu'on justifiera soigneusement.

III.5 On considère dans cette question l'application ϕ de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant :

$$\phi''(t)+\phi(t)=\varphi(t) \text{ pour tout } t\in\mathbf{R}$$

et $$\phi(0)=\phi'(0)=0.$$

III.5.1 La fonction ϕ est-elle 2π - périodique ?

III.5.2 La fonction ϕ est-elle bornée sur $\mathbf{R}$?

III.5.3 La fonction $t\mapsto e^{-t}\phi(t)$ est-elle intégrable sur $\mathbf{R}_+$?

Fin de l'énoncé.