Concours Centrale - Supélec 2003

Épreuve : MATHÉMATIQUES II **Filière** PC

Dans ce problème, nous étudions les propriétés de certaines classes de matrices carrées à coefficients réels et certains systèmes linéaires de la forme $Ax = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$, A étant une matrice à coefficients réels, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Cette étude fait l'objet des parties I à IV, et les matrices A considérées ont la particularité d'avoir beaucoup de termes nuls. Au cours de la dernière partie, on montre comment la recherche de solutions approchées d'une équation différentielle peut conduire à de tels systèmes linéaires.

Dépendance entre les questions

On peut aborder les parties II à V sans avoir traité entièrement la partie I. Le préambule de la partie III reprend les résultats de la partie II qui sont nécessaires pour la traiter. Les résultats des premières questions de la partie III servent dans la partie IV. Le début de la partie V peut être abordé directement.

Notations du problème

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et I_n désigne la matrice unité d'ordre n. Si M est une matrice (carrée ou non), ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M. On identifie un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et la matrice à n lignes et 1 colonne,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

et ${}^tx$ désigne alors la matrice à 1 ligne et n colonnes : ${}^tx = [x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n]$;

- e_k est l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le k-ième, égal à 1 ;
- $S_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées symétriques, à coefficients réels, d'ordre n (c'est-à-dire à n lignes et n colonnes) ;
- $O_n(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices orthogonales d'ordre n.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Partie I - Une famille de matrices symétriques

Soient n un entier naturel tel que $n \geq 2$, et α un réel strictement positif. On considère dans cette partie les matrices carrées $A_n = (a_{i,j})$ d'ordre n, telles que, pour $1 \leq i, j \leq n$,

$$\begin{cases} a_{i,i} = 1 \\ a_{i,j} = -\alpha, & \text{si } |i-j| = 1 \\ a_{i,j} = 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Ainsi, pour n prenant respectivement les valeurs 2, 3, 4 :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

On note $P_n(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice A_n : $P_n(X) = \det(A_n - XI_n)$.

I.A - À propos des éléments propres de A_n

I.A.1) Calculer les polynômes $P_2(X)$ et $P_3(X)$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A_2 et de A_3.

I.A.2) Montrer que $P_4(X) = (1-X)\,P_3(X) - \alpha^2 P_2(X)$.

I.A.3) De façon plus générale, exprimer $P_{n+2}(X)$ en fonction de $P_{n+1}(X)$ et de $P_n(X)$ pour tout $n \geq 2$.

I.A.4) Démontrer que 1 est valeur propre de A_n si et seulement si n est impair.

I.B - On suppose que n est un entier supérieur ou égal à 3 et que $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A_n associé à la valeur propre λ.

I.B.1) Exprimer x_2 en fonction de x_1.

I.B.2) Exprimer x_3 en fonction de x_1 et x_2. En déduire

$$x_3 = \frac{P_2(\lambda)}{\alpha^2} x_1 .$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

I.B.3) Donner une relation entre x_{k-1}, x_k et x_{k+1} lorsque $2 \le k \le n-1$.

Avec la convention $P_1(X) = 1 - X$, démontrer que, pour tout k tel que $1 \le k \le n-1$,

$$x_{k+1} = \frac{P_k(\lambda)}{\alpha^k} x_1 .$$

I.B.4) Montrer que les sous-espaces propres $Ker(A_n - \lambda I_n)$ de la matrice A_n sont des droites vectorielles, puis que A_n admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

Partie II - Matrices définies positives

On dit qu'une matrice symétrique $A \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^t x A x > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Dans les questions qui suivent, $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, désigne une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et k est un entier tel que $1 \le k \le n$.

II.A - En calculant ${}^t e_k A e_k$, montrer que $a_{k,k} > 0$.

II.B - Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé.

Calculer ${}^t x A x$ et en déduire que $\lambda > 0$. Justifier que $\det(A) > 0$.

II.C - On suppose que $1 \le k < n$ et on écrit A sous la forme de blocs

$$A = \begin{bmatrix} A' & B \\ {}^t B & A'' \end{bmatrix}, \quad \text{où } A' \in S_k(\mathbb{R}).$$

Préciser la taille des blocs A', A'', B, ${}^t B$.

Soit u un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $u_j = 0$ si $j > k$. En calculant ${}^t u A u$ en fonction de A' et de $u' = {}^t(u_1, \ldots, u_k)$, montrer que la sous-matrice A' est elle-même symétrique et définie positive.

II.D - Matrices symétriques à valeurs propres strictement positives

II.D.1) Soient M_1 et M_2 deux matrices symétriques d'ordre n. On suppose qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M_2 = {}^t Q M_1 Q$.

Montrer que M_1 est définie positive si et seulement si M_2 est elle-même définie positive.

II.D.2) Montrer qu'une matrice diagonale d'ordre n, à coefficients réels, est définie positive si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous strictement positifs.

II.D.3) Montrer qu'une matrice $M \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

II.E - Soit A_n la matrice symétrique définie dans la partie I.

Nous allons montrer que, sous certaines conditions, $A_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Supposons que x soit un vecteur propre de A_n associé à la valeur propre λ et désignons par i_0 un indice pour lequel $\sup\limits_{1 \le i \le n} |x_i| = |x_{i_0}|$.

II.E.1) Montrer que si $i_0 = 1$ ou $i_0 = n$ alors $|1-\lambda| \le \alpha$ (*indication :* écrire la ligne 1 ou la ligne n du système $A_n x = \lambda x$).

II.E.2) Montrer que si $2 \le i_0 \le n-1$, alors $|1-\lambda| \le 2\alpha$.

II.E.3) En déduire que si $\alpha < 1/2$, la matrice A_n est définie positive.

Partie III - Décomposition des matrices définies positives

Préambule : On cherche à démontrer dans cette partie la propriété $\mathscr{P}$:

Pour toute matrice $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice carrée L d'ordre n, triangulaire inférieure et à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $M = L\,{}^tL$.

On pourra utiliser ici les résultats de la partie II, en particulier le fait que, si $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$,

- ses termes diagonaux sont strictement positifs ;
- son déterminant est strictement positif ;
- les sous-matrices formées des termes d'indices i, j, tels que $1 \le i, j \le k$, où $k \le n$, sont elles-mêmes symétriques et définies positives.

III.A - Montrer la propriété $\mathscr{P}$ pour $n = 2$. En notant

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} r & 0 \\ s & t \end{bmatrix},$$

donner les expressions de r, s, t en fonction de a, b, d.

III.B - On suppose la propriété $\mathscr{P}$ vraie au rang $n-1$ (avec $n \ge 3$), et on considère une matrice $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, que l'on écrira en 4 blocs :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & x \\ {}^tx & m \end{bmatrix},$$

où M_1 est une matrice carrée d'ordre $n-1$, m un réel et x un vecteur de $\mathbb{R}^{n-1}$, ${}^tx$ désignant la ligne transposée de x, à savoir : ${}^tx = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n-1}]$.

III.B.1) Montrer que M_1 est inversible.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

III.B.2) Soient $\mu > 0$, $w \in \mathbb{R}^{n-1}$ et L' une matrice triangulaire inférieure, d'ordre $n-1$, à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $M_1 = L' \, {}^tL'$. Montrer que la matrice carrée d'ordre n

$$L = \begin{bmatrix} L' & 0 \\ {}^tw & \mu \end{bmatrix}, \quad \text{où } 0 \text{ désigne le vecteur nul de } \mathbb{R}^{n-1},$$

vérifie $M = L \, {}^tL$ si et seulement si :

$$\begin{cases} L'w = x \\ \mu^2 = m - {}^txM_1^{-1}x \end{cases} \tag{1}$$

III.B.3) En admettant que

$$m - {}^txM_1^{-1}x > 0, \tag{2}$$

montrer que la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang n.

III.C - Preuve de (2) et fin de la démonstration

III.C.1)

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} I_{n-1} & x \\ {}^ty & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & m \end{bmatrix}, \text{ d'ordre } n \geq 3.$$

Calculer $\det(A)$ en fonction de m, des x_i et des y_i.

III.C.2) Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive que l'on écrit par blocs :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & x \\ {}^tx & m \end{bmatrix}.$$

a) Calculer le produit de deux matrices :

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & x \\ {}^txM_1^{-1} & m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ {}^t0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Montrer, par un calcul de déterminants, que M vérifie la relation (2).

III.D - Décrire un algorithme de calcul de la matrice L.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Partie IV - Matrices tridiagonales

IV.A - Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice symétrique définie positive d'ordre n. On suppose que M est de plus tridiagonale, c'est-à-dire qu'elle vérifie $m_{i,j} = 0$ si $|i-j| \geq 2$.

IV.A.1) On suppose $n \geq 3$. Soient $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, tel que $x_i = 0$ si $1 \leq i \leq n-2$, et $L' = (\ell_{i,j})$, une matrice d'ordre $n-1$, triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont non nuls.
Résoudre l'équation $L'w = x$.

IV.A.2) L désigne encore la matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $L\,{}^tL = M$.

Démontrer, en raisonnant par récurrence et en utilisant la question III.B.2), que L est tridiagonale.

IV.B - On reprend les notations de la partie I et on suppose $\alpha < 1/2$. On note L_n la matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A_n = L_n{}^tL_n$.

IV.B.1) Calculer L_2 et L_3.

IV.B.2) On s'intéresse au système linéaire $A_n x = b$ où $b \in \mathbb{R}^n$.

a) Montrer qu'il possède une unique solution.

b) Montrer que la résolution de ce système est équivalente à la résolution successive des systèmes $L_n y = b$ et ${}^tL_n x = y$.

c) Dénombrer avec soin les additions, les soustractions, les multiplications et les divisions que nécessite la résolution successive de ces deux systèmes.

Montrer que seules $2(3n-2)$ de ces opérations sont nécessaires pour obtenir x.

Partie V - Solutions approchées d'une équation différentielle

V.A - Question préliminaire : approximation d'une dérivée seconde

On pose $\mathcal{I} = [a, b]$. Soit $\phi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^4. On rappelle que pour z et θ tels que z, $z+\theta \in \mathcal{I}$, on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégral sous la forme :

$$\phi(z+\theta) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\phi^{(k)}(z)}{k!}\theta^k + \int_0^\theta \frac{(\theta-t)^3}{3!}\phi^{(4)}(z+t)dt .$$

On note

$$M_4 = \sup_{x \in [a, b]} \left|\phi^{(4)}(x)\right| .$$

V.A.1) Justifier l'existence de M_4 et donner une majoration de la valeur absolue du reste intégral en fonction de θ et de M_4. On pourra commencer par le cas où $\theta > 0$.

V.A.2) Montrer que si $z - \theta$, $z + \theta \in \mathcal{I}$,

$$\phi''(z) = \frac{\phi(z+\theta) - 2\phi(z) + \phi(z-\theta)}{\theta^2} + R_z(\theta), \tag{3}$$

avec

$$|R_z(\theta)| \le \frac{M_4\theta^2}{12}.$$

Dans toute la suite du problème, on se donne $\omega > 0$, deux réels a_0 et a_1, une fonction g sur $[0, 1]$, à valeurs réelles, de classe C^2.

On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} u'' - \omega^2 u = g, & \text{sur } [0, 1] \\ u(0) = a_0 \\ u(1) = a_1 \end{cases} \tag{4}$$

V.B -

V.B.1) Donner l'expression générale des solutions de l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}) : u'' - \omega^2 u = 0.$$

V.B.2) On note u_0 une solution particulière de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : u'' - \omega^2 u = g.$$

Donner l'expression générale des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$. Montrer que le problème (4) admet une solution et une seule.

V.B.3) Montrer que cette solution est de classe C^4.

V.C - On se propose d'approcher la solution du problème (4)

On subdivise l'intervalle $[0, 1]$ en considérant les points

$$t_k = \frac{k}{n+1}, \; k \in \{0, \ldots, n+1\}.$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Pour $1 \leq k \leq n$, on remplace l'équation :

$$u''(t_k) - \omega^2 u(t_k) = g(t_k)$$

par l'équation approchée :

$$\frac{u(t_{k+1}) - 2u(t_k) + u(t_{k-1})}{\theta^2} - \omega^2 u(t_k) = g(t_k), \qquad (5)$$

dans laquelle :

$$\theta = \frac{1}{n+1}.$$

On note

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t_1) \\ \vdots \\ u(t_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

V.C.1) Montrer que l'on peut choisir un réel $\alpha > 0$, que l'on exprimera en fonction de θ et de ω, qui permet de réécrire le système formé des n équations (5) sous la forme $A_n x = b$ où A_n est la matrice étudiée dans la partie I et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ que l'on précisera.

V.C.2) Montrer que le système linéaire $A_n x = b$ possède une unique solution.

V.C.3) Dans cette question on choisit $\omega = 4$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $n = 3$, et on considère la fonction g définie par

$$g(t) = \frac{4}{t+1}.$$

Donner les valeurs numériques de α, A_3, L_3 et b.

Donner les expressions approchées de $u(1/4)$, $u(2/4)$, $u(3/4)$ obtenues en mettant en œuvre la démarche proposée dans les parties IV et V du problème.

••• FIN •••

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .