SESSION 2003 PCM2007

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

****

N.B.: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

PARTIE I

Pour tout nombre réel $u \in]0,1[$ on définit la fonction φ_u de la variable réelle t par :

- Pour tout $t \in [-\pi, +\pi[$, $\varphi_u(t) = \cos ut$,
- La fonction φ_u est périodique de période 2π.

Soit $\frac{1}{2}a_0(u) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(u) \cos nt$ la série de Fourier de la fonction φ_u.

I.1 Calculer $a_n(u)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La fonction φ_u est-elle égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier ?

I.2 En déduire, pour tout $u \in]0,1[$, l'égalité :

$$\frac{\pi \cos \pi u}{\sin \pi u} - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2}.$$

I.3 Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $[0,1[$, et que la série de fonctions de terme général $u'_n(x)$ converge normalement sur tout segment $[0,a] \subset [0,1[$.

En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.

I.4 Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par la récurrence :

$$s_0(x) = x, \qquad s_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) s_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

I.4.1 Montrer que la suite de fonctions $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Nous noterons s sa limite.

I.4.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $s_n(x+1) = \dfrac{x+n+1}{x-n} s_n(x)$.
En déduire que $s(x+1) = -s(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.4.3 Calculer $s(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.
En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $s(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi}$.

PARTIE II

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} x(x+1)\cdots(x+n-1) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

II.1

II.1.1 Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre entier naturel. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} f_n(-p)$.

II.1.2 On suppose que x n'est pas un nombre entier négatif ou nul.
Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite non nulle (on pourra considérer la série de terme général $\ln \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, défini à partir d'un certain rang N_x que l'on déterminera en fonction de x).
Nous noterons f la fonction $\lim_{n\to+\infty} f_n$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II.2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = xf(x+1)$.
Calculer $f(1)$ et en déduire $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.3 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x)f(1-x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi}$.
On pourra étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$ le rapport $\dfrac{f_n(x)f_n(1-x)}{s_n(x)}$.

II.4 On se propose dans cette question de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a la relation :

$$(1) \qquad f(px) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

II.4.1 Montrer que la relation (1) est vérifiée lorsque px est entier négatif ou nul.

II.4.2 On suppose que px n'est pas entier négatif, et soit n un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{p^{px-1} f_{pn}(px)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x + \frac{k}{p}\right)}$ ne dépend pas de x. En déduire que f vérifie une relation du type :

$$f(px) = A_p\, p^{-px+1} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right),$$

où A_p est un nombre réel positif ou nul dépendant de p.

II.4.3 En écrivant pour $x = \dfrac{1}{p}$ la relation ci-dessus, montrer que :

$$A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(1 - \frac{k}{p}\right) = 1.$$

En déduire une expression de A_p^2 en fonction de p et de $\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p}$.

II.4.4 Montrer l'identité suivante entre fonctions polynômes de la variable réelle x :

$$\left(x^{p-1} + x^{p-2} \cdots + x + 1\right)^2 = \prod_{k=1}^{p-1} \left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{p} + 1\right).$$

En donnant à x la valeur 1, en déduire les valeurs de $\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p}$ et de A_p, ainsi que la relation (1).

PARTIE III

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

III.1 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ et montrer que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{D}$.

III.2 Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

III.2.1 On pose $g_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$. Déterminer une relation entre $g_n(x)$ et $g_{n-1}(x+1)$ et en déduire l'expression de $g_n(x)$ en fonction de x et n.
En déduire que $G_n(x) = \dfrac{n}{(n+x) f_n(x)}$.

III.2.2 Montrer que pour tout $t \in [0, n]$ on a les inégalités $e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ et $e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$. En déduire que l'on a $0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]$ pour tout $t \in [0, n]$.

III.2.3 Montrer, par récurrence sur n, que l'on a $(1-a)^n \geq 1 - na$ pour tout $a \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que pour tout $t \in [0, n]$ on a les inégalités :

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}.$$

III.2.4 Déduire de ce qui précède la limite, pour $x \in]0, +\infty[$, de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et exprimer $f(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

III.3 Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Fin de l'énoncé