SESSION 2003 MPM207

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

*Les calculatrices **sont interdites**.*

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.

Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée, $\text{rang}(A)$ son rang et $\text{Tr}(A)$ sa trace.

I_n : la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX\,A\,X \geq 0$.

$\text{GL}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : ${}^tM\,M = I_n$.

Pour p entier naturel, Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p et ∇_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p.

Objectifs

Le but du sujet est de calculer la distance (par la norme de Schur définie à la question II.3.) d'une matrice à :

dans la partie II., $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de projection orthogonale,

dans la partie III., $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de décomposition polaire,

dans la partie IV., Δ_p par des notions de densité,

dans la partie V., ∇_p par le théorème de Courant et Fischer.

La partie I. traite un exemple qui sera utilisé dans les différentes parties.

Remarque : dans le texte, le mot « positif » signifie « supérieur ou égal à 0 ».

I. Exercice préliminaire

1. Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $H = {}^t\Gamma\,\Gamma$.

Diagonaliser la matrice H et déterminer une matrice P de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}\,H\,P$.

2. On pose $S = P\,D\,P^{-1} \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, montrer que la relation $\Gamma = U\,S$ définit une matrice $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et calculer cette matrice.

II. Calcul de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A\,|\,B) = \mathrm{Tr}({}^tA\,B)$.
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = \left((A\,|\,A)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Dans tout le sujet, si Π est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel $d(A, \Pi) = \inf\limits_{M \in \Pi} \|A - M\|$.

4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.

5. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \left\|\frac{1}{2}(A - {}^tA)\right\|$ et déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

6. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

III. Calcul de la distance de A à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

A. Théorème de la décomposition polaire

7. Montrer qu'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

8. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ montrer que la matrice ${}^tA\,A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D=\operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ à termes positifs telle que ${}^tA\,A = D^2$.

On note $A_1, A_2, \dots, A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de la matrice A.

a. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et n, évaluer ${}^tA_i\,A_j$.

En particulier, si i est un entier pour lequel $d_i = 0$, que vaut A_i ?

b. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (par rapport au produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tX\,Y$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) telle que, pour tout entier naturel i entre 1 et n, $A_i = d_i\,E_i$.

c. En déduire qu'il existe une matrice E de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = E\,D$.

10. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tA\,A = {}^tB\,B$.

a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice orthogonale P telles que : $P^{-1}\,{}^tA\,A\,P = P^{-1}\,{}^tB\,B\,P = D^2$.

b. Montrer qu'il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = U\,B$.

11. Déduire des questions précédentes le théorème de décomposition polaire :

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,S$.

(Remarque : on peut également établir l'unicité de la matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et même l'unicité de la matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si A est de plus inversible dans cette décomposition mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème).

B. Calcul de $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

12. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|M\,\Omega\| = \|\Omega\,M\| = \|M\|$.

13. Dans la suite de cette partie, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,S$; il existe une matrice diagonale D et une matrice P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = P\,D\,P^{-1}$.

a. Montrer que, pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A-\Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$ et en déduire que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

b. Montrer que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

14. On note $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

a. Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D-\Omega\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2\,\mathrm{Tr}(D\,\Omega) + n$.

b. Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(D\,\Omega) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

c. Conclure que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.

15. Montrer que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.

16. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

IV. Calcul de la distance de A à Δ_p

17. Un résultat de densité.

a. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \alpha$, la matrice $M - \lambda\, I_n$ est inversible.

b. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer, pour tout entier naturel $p \leq n$, $d(A, \Delta_p)$.

V. Calcul de la distance de A à ∇_p

A. Théorème de Courant et Fischer

Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On notera $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ ses valeurs propres, on notera $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, P la matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = P\,D\,{}^t\!P$ et $C_1, C_2, ..., C_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formant les colonnes de la matrice P.

Si k est un entier entre 1 et n, on note Ψ_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k. Nous allons montrer que :

$\lambda_k = \max\limits_{F\in\Psi_k} \min\limits_{X\in F-\{0\}} \dfrac{{}^tX\,A\,X}{{}^tX\,X}$ (théorème de Courant et Fischer).

19. Soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans la base orthonormée $(C_1, C_2, ..., C_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer en fonction des x_i et λ_i (i compris entre 1 et n) : ${}^tX\,A\,X$ et ${}^tX\,X$ et pour k entier entre 1 et n, $\dfrac{{}^tC_k\,A\,C_k}{{}^tC_k\,C_k}$.

20. Soit k entier entre 1 et n, on pose $F_k = \text{vect}\{C_1, C_2, ..., C_k\}$.

Montrer que pour tout X non nul de F_k, $\dfrac{{}^tX\,A\,X}{{}^tX\,X} \geq \lambda_k$ et déterminer $\min\limits_{X\in F_k-\{0\}} \dfrac{{}^tX\,A\,X}{{}^tX\,X}$.

21. Soit $F \in \Psi_k$,

a. montrer que $\dim(F \cap \text{vect}\{C_k, C_{k+1}, ..., C_n\}) \geq 1$.

b. Si X est un vecteur non nul de $F \cap \text{vect}\{C_k, C_{k+1}, ..., C_n\}$, montrer que $\dfrac{{}^tX\,A\,X}{{}^tX\,X} \leq \lambda_k$.

22. Conclure.

B. Calcul de $d(A, \nabla_p)$

<u>*Dans toute cette partie*</u> : A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r et p est un entier naturel, $p < r$.

23. Montrer qu'il existe deux matrices E et P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes positifs telles que $A = E\,D\,P$. En déduire que le rang de la matrice ${}^tA\,A$ est encore r.
(On pourra utiliser les résultats de la question **9.**)

24. Si on note les valeurs propres de la matrice symétrique réelle ${}^tA\,A$ de rang r : $\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = ... = \mu_n = 0$, si on pose $D = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, ..., \sqrt{\mu_r}, 0, ..., 0)$, si pour $1 \leq l \leq n$ on note M_l la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la l-ième colonne est celle de la matrice $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de la question **23.**, tous les autres termes de M_l étant nuls, on a clairement : $E\,D = \sum\limits_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l}\, M_l$.

Montrer alors qu'il existe une famille orthonormale $(R_1, R_2, ..., R_n)$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire $(A|B) = \text{Tr}({}^tA\,B)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), toutes de rang un, et telles que $A = \sum\limits_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l}\, R_l = \sum\limits_{l=1}^{r} \sqrt{\mu_l}\, R_l$.

25. Avec les notations de la question **24,** on pose $N = \sum_{l=1}^{p} \sqrt{\mu_l}\, R_l$.

Montrer que $\mathrm{rang}(N) \leq p$ puis que $d(A, \nabla_p) \leq \sqrt{\mu_{p+1} + \ldots + \mu_r}$.

26. Soit M une matrice de rang p ($p < r$), on note $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq 0$ les valeurs propres de la matrice ${}^t(A - M)\,(A - M)$ et on pose $G = \mathrm{Ker}\, M \cap \mathrm{Im}({}^tA\, A)$.
Soit k un entier compris entre 1 et $r - p$.

a. Montrer que $\dim G \geq r - p$.

b. Soit F un sous-espace vectoriel de G de dimension k, montrer que :

$$\alpha_k \geq \min_{X \in F - \{0\}} \frac{{}^tX\, {}^tA\, A\, X}{{}^tX\, X}.$$

c. On note $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de la matrice ${}^tA\, A$, le vecteur V_i étant associé à la valeur propre μ_i de telle sorte que : $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \ldots = \mu_n = 0$.
Montrer que $\dim(G \cap \mathrm{vect}\{V_1, V_2, \ldots, V_{k+p}\}) \geq k$.

d. En déduire que $\alpha_k \geq \mu_{k+p}$.

27. En déduire $d(A, \nabla_p)$.

28. Calculer, pour $p \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\gamma_p = d(\Gamma, \nabla_p)$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

Fin de l'énoncé.