ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE ANNEE 2002

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Le sujet comprend :

- 1 page de garde,
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 12 pages de texte, numérotées de 1 à 12.

CALCULATRICE AUTORISEE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

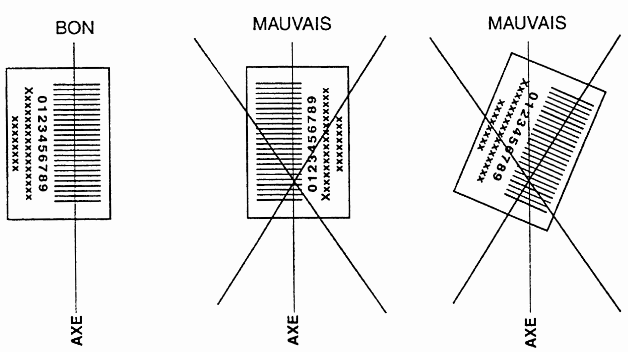
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 30 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
Chaque candidat devra choisir au plus 25 questions parmi les 30 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 25 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 25 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 30, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 31 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 30, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

- soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

- soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.

- soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
vous devez alors noircir la case E.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

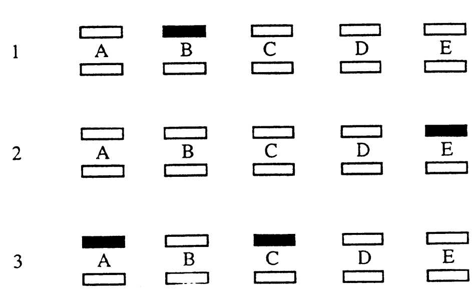
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

<u>Question 1</u> : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

<u>Question 2</u> : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

<u>Question 3</u> : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



Questions liées: 1 à 16
17 à 25
26 à 30

PARTIE I

Dans toute cette partie le corps de base est celui des nombres réels; on désigne par $E(x)$ la partie entière du nombre réel x et par n un entier naturel.

Question 1

Soit un polynôme de degré n à une indéterminée à coefficients entiers de la forme $a_n x^n + \ldots + a_o$ avec $a_o \neq 0$, admettant une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ ou $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{Z}^*$, p et q étant premiers entre eux ou étrangers. On a alors:

a) p divise a_n et q divise a_o

b) p et q divisent a_o

c) p divise a_o et q divise a_n car q divise $a_n p^n$

d) p divise a_o mais pq ne divise pas $a_n a_o$

Question 2

Soit f la fonction polynôme définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - x - 1$

a) f admet au moins 2 racines réelles car sa dérivée s'annule en 2 points

b) f admet une racine rationnelle et 2 racines complexes conjuguées

c) f ne possède aucune racine réelle

d) f admet 2 racines complexes conjuguées et une racine réelle dans l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Question 3

Soit x un réel quelconque, on peut écrire $\cos(nx)$ sous la forme $P_n(\cos x)$ où P_n est un polynôme à une indéterminée.

a) de degré $n+1$ à coefficients entiers relatifs

b) de degré n à coefficients réels non entiers

c) de degré n à coefficients entiers relatifs

d) unique car l'application cos est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1,1]$

Question 4

Le polynôme P_n défini dans la question 3 s'écrit pour $n = 0$

a) $P_o(X) = X$

b) $P_o(X) = \frac{1}{2}$

et pour $n = 1$

c) $P_1(X) = 2X^2 - 1$

d) $P_1(X) = X$

Question 5

On a la relation, pour tout réels a, b

a) $\cos a \cos b = 2(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

b) $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

et la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans la question 3 vérifie, pour tout entier n strictement positif.

c) $P_{n+1}(X) - P_{n-1}(X) = 2XP_n(X)$

d) $P_{n+1}(X) + P_{n-1}(X) = XP_n(X)$

Question 6

Cette suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que:

a) $P_n(X) = X^n - C_n^2 X^{n-2}(1-X^2) + \ldots + (-1)^k C_n^{2k} X^{n-2k}(1-X^2)^k + \ldots$
et P_n est impair si n est pair

b) le coefficient de X^n est, pour tout entier n non nul,
$C_n^o + C_n^2 + \ldots + C_n^{2k} + \ldots = 2^{n-1}$

c) $P_n(-1) = (-1)^{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

d) $P_n(0) = (-1)^n\ \forall n \in \mathbb{N}$

Question 7

Pour tout entier n strictement positif les racines x_k de ce polynôme P_n sont:

a) $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ où k est un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$

b) $\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}$ où k est un entier est un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$

c) des réels n'appartenant pas à l'intervalle $[-1, 1]$

d) les n réels de l'intervalle $]-1,1[$ définis par $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ où k est un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$

Question 8

Supposons $n \geq 2$, on note pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-2$, x_k les racines de P_n et y_k celles de P_{n-1}, on a alors:

a) $x_{k+1} > y_k > x_k$

b) $x_{k+1} > x_k > y_k$

c) $x_k > y_k > x_{k+1}$ car $\frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{k\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2n} - \frac{(k+1)\pi}{n} < 0$

et $\frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{k\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2n} - \frac{k\pi}{n} > 0$

d) $x_k > y_k > x_{k+1}$ car $\frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{k\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2n} - \frac{(k+1)\pi}{n} > 0$

et $\frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{k\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2n} - \frac{k\pi}{n} < 0$

On considère l'équation différentielle, pour $n \in \mathbb{N}$ (E_n) $y'' + n^2 y = 0$

Question 9

La fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos(nx)$

a) forme une base de l'espace des solutions de (E_n)

b) est une solution de (E_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) vérifie l'équation (E_n) uniquement pour $n \in \mathbb{N}^*$

d) vérifie l'équation différentielle $y'' - n^2 y = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Question 10
Si on pose $X = \cos x$ on obtient pour y fonction de x

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -X \dfrac{dy}{dX}$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sin^2 x \dfrac{d^2y}{dX^2} - \cos x \dfrac{dy}{dX}$

et l'équation (E_n) est transformée en l'équation (E'_n) de la forme,

c) $(1 + X^2)\dfrac{d^2y}{dX^2} - X\dfrac{dy}{dX} + n^2 y = 0$

d) $(1 - X^2)\dfrac{d^2y}{dX^2} - X\dfrac{dy}{dX} + n^2 y = 0$

Question 11
Pour tout n ,entier naturel, la fonction polynôme P_n définie à la question 3

a) est solution de (E_n)

b) est solution de (E'_n) car $(1 + x^2)P''_n(x) - xP'_n(x) + n^2 P_n(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

c) ne vérifie ni (E_n), ni (E'_n)

d) vérifie (E'_n) car $\forall x \in [-1,1]$ $\quad (1 + x^2)P''_n(x) - xP'_n(x) + n^2 P_n(x) = 0$

Question 12
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction polynôme $Q_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{n,k}\, x^{n-2k}$

Si Qn est solution de l'équation (E'_n), définie à la question 10, les coefficients $a_{n,k}$ vérifient pour tout k compris entre 0 et $E\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

a) $(n - 2k)(n - 2k - 1)a_{n,k} + (n - 2k + 2)(n - 2k + 1)a_{n,k-1} - (n - 2k)a_{n,k} + n^2 a_{n,k} = 0$

b) $a_{n,k} = -\dfrac{1}{4k}\dfrac{1}{n-k}(n - 2k + 2)(n - 2k + 1)a_{n,k-1}$

c) $a_{n,k} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k}} \dfrac{n}{n-k} C_{n-k}^{k}$

d) $a_{n,k} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}} \dfrac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} a_{n,0}$

Question 13

Pour tout entier naturel n, le polynôme P_n défini à la question 3 est donc de la forme:

a) $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{(-1)^k}{n-k} n 2^{n-2k-1} C_{n-k}^{k} X^{n-2k}$

b) $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^{k-1}}{n-k} n 2^{n-2k-1} C_{n-k}^{k} X^{n-2k}$

c) $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{n}{n-k} 2^{n-2k-1} C_{n-k}^{k} X^{n-2k+1}$

d) $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{n}{n-k} 2^{n-2k-1} C_{n-k}^{k} X^{n-2k}$

Soient p et q, 2 entiers naturels non nuls premiers entre eux (ou étrangers), tels que le rationnel $r = \frac{p}{q}$ vérifie $0 < r < \frac{1}{2}$ et $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ désignant l'ensemble des nombres rationnels)

Question 14

On a alors:

a) $q = 2$ et $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$

b) $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 tq\ \pi \frac{p}{q} u + \pi v = \frac{\pi}{q}$

c) $q \geq 3$ et $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 tq \ \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) = P_u(\cos(r\pi))$

d) $q \geq 3$ $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$ car $\exists v \in \mathbb{Z}$ $\exists n \in \mathbb{N} tq \ \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) = (-1)^v P_n(\cos(r\pi))$

Question 15

La relation $q = 4k$ où k est un entier non nul.

a) est impossible puisque $q = 2$

b) est impossible car q est nécessairement impair

c) peut être réalisée

d) est impossible car $P_k\left(\cos\left(\frac{\pi}{4k}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$

Question 16

L'égalité $q = h$ entier impair

a) ne peut être réalisée

Si cette égalité est réalisée on a:

b) $P_h\left(\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)\right) = -1$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)$ est racine du polynôme P_h.

d) $\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)$ est racine de $2^{h-1}X^h + \ldots + a_{h,\frac{h-1}{2}} X + 1 = 0$ car P_h a un terme constant nul.

PARTIE II

On désignera par E l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$, des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et par F le sous-espace vectoriel des polynômes de E de degré inférieur ou égal à 3.
On considère l'application f qui à tout élément P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par $[f(P)](X) = P(X) - P(X-1)$ et on note f_F la restriction de f à F

Question 17

Le sous-espace vectoriel F est de dimension

a) 3
b) 4

et on a:

c) f est une application linéaire de E dans F
d) f_F est un endomorphisme de F

Question 18

La matrice M de l'application f_F par rapport aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée de cette application s'écrit:

a) $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Question 19

De manière générale, pour des matrices de type (n,p) (n lignes et p colonnes) à coefficients dans le corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on a:

a) 2 matrices équivalentes sont semblables
b) 2 matrices équivalentes ont même rang

et lorsque l'on ajoute à la ligne i_o d'une matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(K)$ la ligne i_i multipliée par $\lambda \in K$, le rang de cette matrice,

c) est inchangée
d) peut être modifié

Question 20

Le rang de l'application f_F

a) vaut 3 car est égal au nombre de colonnes non nulles de M
b) est nécessairement inférieur ou égal à 3 car l'espace F est de dimension 3
c) vaut 2 car il y a 2 colonnes de M linéairement indépendantes
d) vaut 3 car on peut extraire au plus 3 colonnes ou lignes linéairement indépendantes de M

Question 21

Les sous-espaces vectoriels noyau et image de f_F sont tels que:

a) $dim\,ker f_F = dim F - rg f_F = 2$
b) $ker f_F = \mathbb{R}$
c) la famille de polynômes $(1,X)$ forme une base de $Im f_F$
d) $Im f_F$ est le sous-espace $\mathbb{R}_2[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2

On considère la famille (A_0, A_1, A_2, A_3) des polynômes de E définie par $A_0 = 1$ et $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ $f_F(A_i) = iA_{i-1}$ avec O racine de A_i.

Question 22

Ces polynômes vérifient:

a) $0 < deg A_i \leq 3 \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$

b) A_i est divisible par X, $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$

c) $A_2(X) = X(X+1)$ et $A_3(X) = X(X+1)(X+2)$

d) la famille (A_0, A_1, A_2, A_3) forme une base de F

On note B base canonique de F et $\mathcal{A}$ la base de F formée à l'aide des polynômes (A_0, A_1, A_2, A_3) classés par ordre croissant de degré.

Question 23

La matrice de passage P de la base B à la base $\mathcal{A}$ s'écrit:

a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Question 24

La matrice M' de l'application f_F lorsque l'on rapporte F à la base $\mathscr{A}$ s'écrit:

a) $M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

b) $M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $M' = PMP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $M' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1}MP$

Question 25

Soit g l'application définie par $g(X^i) = A_i \ \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$. On a alors:

a) g est un endomorphisme injectif mais non bijectif de F
b) g est un endomorphisme bijectif de F car g transforme une base de F en une base de F

et la matrice G de g par rapport à la base canonique de F vérifie:

c) $G = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $G = P$

PARTIE III

On pose pour tout entier naturel n : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx$

Question 26

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que:

a) $I_o = 0$

b) $I_1 = -1$

c) $I_n - I_{n-1}$ peut être nul pour certaines valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$

d) $I_n - I_{n-1} > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Question 27

Pour tout entier $n \geq 2$ on a la relation:

a) $I_n = I_{n-2} - \dfrac{1}{n+1} I_n$

b) $I_n = \dfrac{n}{n-1} I_{n-2}$

c) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

d) $I_n = \dfrac{n+1}{n} I_{n-1}$

Question 28

Le terme général I_n de cette suite s'écrit, pour tout entier naturel n

a) $I_n = (n+1) I_o$

b) $I_{2p} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2} \;\; \forall p \in \mathbb{N}$

c) $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2} \pi$ et $I_{2p+1} = -\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \forall p \in \mathbb{N}$

d) $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2} \pi$ et $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \forall p \in \mathbb{N}$

Question 29

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) est strictement croissante
b) est décroissante et peut être stationnaire
et elle vérifie les inégalités

c) $I_{2p+1} > I_{2p} > I_{2p-1}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$

d) $I_{2p+1} < I_{2p-1}$ et $I_{2p} > I_{2p-2}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$

Question 30

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) est convergente car les suites $(I_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(I_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes

b) est divergente car les suites $(I_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(I_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite

et pour tout entier naturel n, on a, en introduisant le changement de variable $x = \cos t$

c) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_{2n+1}$

d) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = -I_{2n}$