SESSION 2002 **PSIM104**

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

***

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

***

Cette épreuve comporte deux problèmes totalement indépendants l'un de l'autre.

PROBLEME 1

Dans ce problème, on désigne par :

E la fonction partie entière,

I l'intervalle $]0,+\infty[$,

$\mathcal{A}$ l'ensemble des applications continues par morceaux de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ qui vérifient la condition : pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ $|f(t)| \leq t$.

Si $f \in \mathcal{A}$ et $x \in I =]0,+\infty[$, on considère $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^+} e^{-xt} f(t)\, dt$.

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de F.

Préliminaire – Etude de deux fonctions :

On considère pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$: $u_n(x) = e^{-nx}$ et $v_n(x) = ne^{-nx}$.

P.1/ Déterminer l'ensemble de convergence simple D de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ (resp. D' de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} v_n(x)$).

On note désormais $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x \in D$ et $h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ pour $x \in D'$.

P.2/ Expliciter $g(x)$ pour $x \in D$.

P.3/ Etablir (en la justifiant) une relation entre les fonctions g et h. En déduire l'expression explicite de $h(x)$ pour $x \in D'$.

1/ Une étude de $\mathcal{A}$.

1.1/ On considère la fonction f_0 définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f_0(t) = t$.
Montrer que si $x \in I$ alors l'application $t \mapsto e^{-xt} f_0(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$ et expliciter $F_0(x) = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-xt} f_0(t)\, dt$.

1.2/ Vérifier que si $f \in \mathcal{A}$ et si $x \in I$, alors la fonction $\varphi_x \; : t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

Ainsi, lorsque $f \in \mathcal{A}$, la fonction $F : x \mapsto \int_{\mathbf{R}^+} e^{-xt} f(t)\, dt$ est bien définie sur I et on note désormais $F = \mathcal{L}(f)$.

1.3/ Soit $f \in \mathcal{A}$ et $F = \mathcal{L}(f)$.

1.3.1/ Déduire de ce qui précède que $xF(x)$ admet une limite que l'on précisera lorsque x tend vers $+\infty$.

1.3.2/ On suppose de plus que f est continue sur $\mathbf{R}^+$. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.

2/ Exemple 1 : fonction partie entière.

On considère dans cette question la fonction f_1 définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f_1(t) = E(t)$ (partie entière de t) et soit $F_1 = \mathcal{L}(f_1)$.

2.1/ Vérifier que la fonction f_1 appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$.

2.2/ Montrer que la fonction F_1 peut s'exprimer à l'aide de l'une des deux fonctions g ou h , et expliciter $F_1(x)$ pour $x \in I$.

3/ Un deuxième exemple.

On considère dans cette question la fonction f_2 définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f_2(t) = E(t) + (t - E(t))^2$ et soit $F_2 = \mathcal{L}(f_2)$.

3.1/ Montrer que la fonction f_2 appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$.

3.2/ La fonction F_2 est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I ?

3.3/ Indiquer l'allure du graphe de F_2 sur l'intervalle I.

3.4/ Expliciter $F_2(x)$ pour $x \in I$.

PROBLEME 2

Dans tout ce problème, $n \in \mathbf{N}^*$; si $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ avec $p \leq q$ on note $[\![p, q]\!]$ l'ensemble des $k \in \mathbf{N}$ tels que $p \leq k \leq q$.

On désigne par :

$\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n+1$ à coefficients dans $\mathbf{R}$,

O_{n+1} l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$,

D_{n+1} l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$;

si $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ on note :

$M = (\mu_{i,j})$ avec $(i, j) \in [\![1, n+1]\!] \times [\![1, n+1]\!]$, où $\mu_{i,j}$ désigne l'élément de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de la matrice M,

M^t la matrice transposée de M,

$\det M$ le déterminant de M,

f_M l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{n+1}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$ est la matrice M,

M^* la transposée de la comatrice de M (on rappelle la relation $MM^* = M^*M = (\det M)I_{n+1}$, où I_{n+1} désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$).

Etant donné deux éléments de $\mathbf{R}^n$: $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, on associe au couple (a, b) la matrice $A_n(a, b) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ définie par $A_n(a, b) = (\alpha_{i,j})$ avec

$\alpha_{i,j} = 0$ lorsque $|i - j| \neq 1$

$\alpha_{i+1,i} = a_i$, $\alpha_{i,i+1} = b_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Par exemple pour $n = 2$ $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$

$$A_2(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 \\ 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, n fixé, on note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices $A_n(a,b)$ pour $(a,b) \in (\mathbf{R}^n)^2$.

On se propose d'étudier quelques propriétés des matrices $A_n(a,b)$ et de l'ensemble $\mathcal{E}_n$.

PARTIE I

Etude de $\mathcal{E}_1$

Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des matrices $A_1 = A_1(a_1, b_1) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $a_1 \in \mathbf{R}$ *et* $b_1 \in \mathbf{R}$.

I.1/ soit $G = A_1(1,0)$ $H = A_1(0,1)$

Calculer G^2, H^2, GH, HG.

L'ensemble $\mathcal{E}_1$ est-il stable pour la multiplication ?

I.2/ Expliciter l'ensemble $\mathcal{E}_1 \cap O_2$ (c'est à dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}_1$ qui sont orthogonales).

I.3/ Montrer que toute matrice $A = A_1(a_1, b_1)$ appartenant à $\mathcal{E}_1$ peut s'écrire sous la forme $A = U\Delta$ avec $U \in \mathcal{E}_1 \cap O_2$ et $\Delta \in D_2$; préciser le nombre de décompositions.

I.4/ On considère une matrice $A = A_1(a_1, b_1) \in \mathcal{E}_1$.

I.4.1/ On suppose $a_1 b_1 \neq 0$. Justifier l'existence de A^{-1} ; la matrice A^{-1} appartient-elle à $\mathcal{E}_1$?

I.4.2/ La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

- lorsque $a_1 b_1 < 0$?
- lorsque $a_1 b_1 > 0$?

I.4.3/ On suppose que $a_1 b_1 = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a_1 et b_1 pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

I.5/ On considère deux matrices de $\mathcal{E}_1$:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & y \\ x & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & t \\ z & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$$

I.5.1/ Les deux matrices K *et* L sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ lorsque $xy \neq zt$?

I.5.2/ On suppose que $xy = zt \neq 0$.
Les deux matrices K *et* L sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$?

PARTIE II

Etude de $\mathcal{E}_n$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$; dans le but de simplifier, on notera $d_n(a,b)$ ou simplement d_n le déterminant de la matrice $A = A_n(a,b)$.

II.1/ Calcul de d_n.

II.1.1/ Calculer d_2.

II.1.2/ Pour $n \geq 3$ exprimer d_n fonction de a_n, b_n et d_{n-2}.

II.1.3/ Quelle est la valeur de d_{2p} pour $p \in \mathbf{N}^*$?

II.1.4/ Calculer d_{2p+1} pour $p \in \mathbf{N}$, en fonction des a_i et des b_i, $i \in [\![1, 2p+1]\!]$.

II.2/ Liens entre $\mathcal{E}_n$, O_{n+1} et D_{n+1} .

II.2.1 On suppose qu'il existe une matrice $U \in \mathcal{E}_n \cap O_{n+1}$. Soit $\Delta \in D_{n+1}$, on pose $A = U\Delta$; vérifier que $A \in \mathcal{E}_n$ et que $A^t A \in D_{n+1}$.

II.2.2/ Soit $A \in \mathcal{E}_{2p}$; existe-t-il $U \in \mathcal{E}_{2p} \cap O_{2p+1}$ et $\Delta \in D_{2p+1}$ telles que $A = U\Delta$?

II.2.3/ Pour $n = 3$ on considère la matrice $A = A_3(a,b) \in \mathcal{E}_3$ avec $a = (1,3,5)$ $b = (2,4,6)$. Existe-t-il $U \in \mathcal{E}_3 \cap O_4$ et $\Delta \in D_4$ telles que $A = A_3(a,b) = U\Delta$?

II.2.4/ On suppose que $n = 2p+1$ et que $A = A_{2p+1}(a,b) \in \mathcal{E}_{2p+1} \cap O_{2p+2}$.

II.2.4.1/ Quelles sont les valeurs possibles pour a_1, b_1, a_2, b_2 ?

II.2.4.2/ Préciser l'ensemble $\mathcal{E}_{2p+1} \cap O_{2p+2}$ et son cardinal.

II.2.4.3/ Soit $A \in \mathcal{E}_{2p+1}$ telle que $A^t A \in D_{2p+2}$ et $\det A \neq 0$. Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{E}_{2p+1} \cap O_{2p+2}$ et $\Delta \in D_{2p+2}$ telles que $A = U\Delta$.

II.3/ Matrices symétriques de $\mathcal{E}_n$.

On considère dans cette question la matrice $A = A_n(a,a)$ pour $a \in \mathbf{R}^n$.

II.3.1/ Justifier l'affirmation :

Pour tout $a \in \mathbf{R}^n$ la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$.

Si λ_j , $j \in [\![1, n+1]\!]$ désignent les valeurs propres de f_A, préciser la valeur de $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j$.

II.3.2/ Pour $(x,y) \in \left(\mathbf{R}^{n+1}\right)^2$, on note $< x, y >$ le produit scalaire euclidien canonique de x et y. On associe à $A = A_n(a,a)$ la forme bilinéaire φ_A (notée simplement φ) définie par :

$$\text{pour tout} \quad (x,y) \in \left(\mathbf{R}^{n+1}\right)^2 \qquad \varphi(x,y) = < x, f_A(y) >.$$

La forme bilinéaire φ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbf{R}^{n+1}$? (on pourra considérer $\varphi(x,x)$ pour x vecteur propre de l'endomorphisme f_A).

II.4/ Comatrices et ensemble $\mathcal{E}_n$.

II.4.1/ Montrer que pour toute matrice $A = A_1(a_1, b_1) \in \mathcal{E}_1$ la matrice A^* est élément de $\mathcal{E}_1$.

Dans la suite on suppose que $n \geq 2$.

II.4.2/ Si $A \in \mathcal{E}_n \cap O_{n+1}$ la matrice A^* appartient-elle à $\mathcal{E}_n$?

II.4.3/ Existe-t-il un entier $n \geq 2$ tel que pour toute matrice $A \in \mathcal{E}_n$ la matrice A^* soit élément de $\mathcal{E}_n$?

Fin de l'énoncé.