ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2002 **FILIÈRE PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Ce problème a pour but principal l'étude des coefficients diagonaux des diverses matrices semblables à une matrice donnée.

On désigne par n un entier $\geqslant 2$, par $M_n(\mathbf{R})$ l'espace des matrices à coefficients réels, à n lignes et n colonnes, et par I la matrice identité ; on appelle *scalaires* les matrices de la forme λI où λ est un réel. On rappelle que deux matrices A et B sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible Q vérifiant $B = Q\,A\,Q^{-1}$, c'est-à-dire si A et B représentent un même endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans deux bases de $\mathbf{R}^n$.

Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes :

a) Si une matrice A est non scalaire, il existe un vecteur X de $\mathbf{R}^n$, non nul et non vecteur propre pour A.

b) Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, i et $j \in \{1, \dots, n\}$. Il existe une matrice B semblable à A telle que

$$b_{i,i} = a_{j,j}\ ,\ b_{j,j} = a_{i,i}\ ,\ b_{k,k} = a_{k,k} \quad \text{pour tout } k \neq i, j\ .$$

Deuxième partie

2. On se donne une matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ de trace nulle et on se propose de démontrer qu'il existe une matrice B semblable à A ayant tous ses coefficients diagonaux nuls.

a) Montrer que si A est non nulle, il existe une base $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $AX_1 = X_2$.

b) Conclure en procédant par récurrence sur n.

3. *Applications numériques.* Dans chacun des cas considérés, on indiquera une matrice B répondant à la question et une base qui lui correspond.

a) $n = 2$, A est diagonale avec coefficients diagonaux $1, -1$.

b) $n = 3$, A est diagonale avec coefficients diagonaux $1, 0, -1$.

4. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ non scalaire. Montrer qu'il existe une matrice B semblable à A avec coefficients diagonaux de la forme $(t, 0, \ldots, 0)$, et exprimer t en fonction des coefficients diagonaux de A.

5. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ non nulle. Montrer qu'il existe une matrice B semblable à A avec coefficients diagonaux tous non nuls.

Troisième partie

On dira que deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{R})$ sont *orthosemblables* s'il existe une matrice orthogonale Q vérifiant $B = Q\,A\,Q^{-1}$, c'est-à-dire si A et B représentent un même endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans deux bases orthonormales de $\mathbf{R}^n$. Pour toute matrice A on pose

$$f(A) = \sup\left\{|a_{i,i} - a_{j,j}| \ : i, j = 1, \ldots, n\right\}.$$

On se donne une matrice A et on se propose de démontrer qu'il existe une matrice B, orthosemblable à A et ayant tous ses coefficients diagonaux égaux.

6. Démontrer l'assertion dans le cas où $n = 2$.

7. On suppose maintenant n quelconque et les $a_{i,i}$ non tous égaux.

a) Montrer qu'on peut supposer $f(A) = |a_{1,1} - a_{2,2}|$.

b) Construire une matrice A', orthosemblable à A et telle que

$$a'_{1,1} = a'_{2,2}\ ,\ a'_{i,i} = a_{i,i} \quad \forall i \geqslant 3 \quad , \quad |a'_{1,1} - a'_{i,i}| < f(A) \quad \forall i \geqslant 3\,.$$

c) Construire une matrice A'', orthosemblable à A et telle que $f(A'') < f(A)$.

On désigne par $O_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales, et par E_A celui des matrices orthosemblables à A.

8.a) Montrer que E_A est une partie compacte de $\mathbf{R}^{n^2}$.

b) Montrer que la restriction de la fonction f à E_A atteint son minimum.

c) Conclure.

9. *Application numérique.* On prend $n = 3$ et A diagonale avec coefficients diagonaux $(1,0,0)$; on note A_m, $m = 0,1,\dots$ les matrices successives obtenues par la méthode précédente, de sorte que

$$\text{diag}\,(A_0) = (1,0,0)\ ,\ \text{diag}\,(A_1) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\ ,\ \text{diag}\,(A_2) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\ ,\ \text{etc}\ .$$

Déterminer $f(A_m)$ et les coefficients diagonaux de A_m.

Quatrième partie

On munit $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire usuel noté $(\cdot|\cdot)$ et de la norme correspondante $\|\cdot\|$. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ on pose

$$R(A) = \{(AX \mid X) : \|X\| = 1\}\ .$$

10. Démontrer les assertions suivantes :

a) $R(A)$ contient les valeurs propres réelles de A ainsi que ses coefficients diagonaux.

b) $R(A)$ est un intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$.

c) Si A est symétrique et de trace nulle, le nombre 0 appartient à $R(A)$.

11. Montrer que si la trace t de A appartient à $R(A)$, il existe une matrice B orthosemblable à A avec coefficients diagonaux $(t, 0, \dots, 0)$.

Cinquième partie

On note Sp (A) l'ensemble des valeurs propres d'une matrice A.

12. On se donne une matrice non nulle A de $M_n(\mathbf{R})$ et on note B une matrice semblable à A ayant tous ses coefficients diagonaux non nuls.

a) Trouver une matrice Y telle que l'on ait

$$\text{Sp}\ (Y) = \{1\} \quad \text{et} \quad \text{Sp}\ (B+Y) \cap \text{Sp}\ (Y) = \varnothing\ .$$

b) Construire une matrice X non nulle telle que l'on ait

$$\text{Sp}\ (A+X) \cap \text{Sp}\ (X) = \varnothing\ .$$

13. On désigne par T une application linéaire de $M_n(\mathbf{R})$ dans lui-même qui transforme toute matrice inversible en une matrice inversible.

a) Vérifier que l'on a

$$\mathrm{Sp}\,\left(T(I)^{-1}T(A)\right) \subset \mathrm{Sp}\,(A)\,.$$

b) Montrer que l'application T est inversible.

* *
*