**ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

**ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2002** **FILIÈRE PC**

# PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

L'objet de ce problème est l'étude de systèmes régis par une équation différentielle dépendant d'une donnée appelée « commande » et la recherche de « commandes optimales ».

Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^p$ et $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire euclidien. La *transposée* d'une matrice réelle $M$ est notée $M^*$. On identifie un élément de $\mathbf{R}^p$ avec une matrice à $p$ lignes et une colonne.

Dans ce problème, on appelle fonction *bien continue par morceaux* sur un intervalle $[0,T]$ de $\mathbf{R}$ toute fonction $\varphi$ continue par morceaux, continue à gauche sur $[0,T]$ et continue à droite en 0, c'est-à-dire telle qu'il existe un nombre fini de points, $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = T$ tels que $\varphi$ est continue sur $[0,t_1], ]t_1,t_2], \ldots, ]t_{k-2},t_{k-1}], ]t_{k-1},T]$ et que $\lim\limits_{\substack{t\to t_\ell \\ t>t_\ell}} \varphi(t)$ existe pour $\ell = 1,2,\ldots,k-1$.

## Préliminaires

Soit $\mathcal{M}_p$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles à $p$ lignes. Pour $M \in \mathcal{M}_p$, on pose

$$|||M||| = \sup_{\substack{X\in\mathbf{R}^p \\ X\neq 0}} \frac{\|MX\|}{\|X\|} .$$

**1.a)** Vérifier que $M \in \mathcal{M}_p \longmapsto |||M||| \in \mathbf{R}$ est une norme sur $\mathcal{M}_p$.

**b)** Montrer que, pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_p$,

$$|||MN||| \leqslant |||M|||\ |||N||| .$$

**2.a)** Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$. Montrer que la suite $(S_n(M))_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p$ muni de la norme $|||\cdot|||$.

On pose

$$e^M = \lim_{n\to+\infty} S_n(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k \ .$$

**b)** Montrer que la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto e^{tM} \in \mathcal{M}_p$ est continue, dérivable et que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tM} = M\, e^{tM} \ .$$

**c)** Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tM}\, e^{-tM})$ et, pour $s \in \mathbf{R}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{(s+t)M}\, e^{-tM})$. En déduire que

$$e^{(s+t)M} = e^{sM}\, e^{tM} \ .$$

## Première partie

Soit $T$ un réel $> 0$ et soit $A \in \mathcal{M}_p$. Soit $B$ une fonction bien continue par morceaux sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$, et soit $X_0 \in \mathbf{R}^p$. On pose, pour tout $t \in [0,T]$,

$$X(t) = e^{tA} X_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s) \mathrm{d}s \ .$$

**3.a)** On suppose que $B$ est continue. Montrer que $t \mapsto X(t)$ est l'unique fonction de classe $C^1$ sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ telle que $X(0) = X_0$ et, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) = A\, X(t) + B(t) \ . \qquad (1)$$

*On suppose maintenant et dans toute la suite du problème que $B$ est seulement bien continue par morceaux.*

**b)** Montrer que $t \mapsto X(t)$ est l'unique fonction continue, dérivable en tout point où $B$ est continue, et de classe $C^1$ par morceaux sur $[0,T]$ telle que $X(0) = X_0$ et que la condition (1) soit satisfaite en tout point où $X$ est dérivable. *Par convention*, on dira encore que $X$ est solution de l'équation différentielle (1) sur $[0,T]$.

Soit $q \in \mathbf{N}^*$ tel que $q \leqslant p$ et soit $K$ une matrice réelle à $p$ lignes et $q$ colonnes. On désigne par $\mathcal{U}$ l'espace vectoriel des fonctions bien continues par morceaux sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^q$. A toute fonction $U \in \mathcal{U}$, on associe l'équation différentielle sur $[0,T]$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) = A\, X(t) + K\, U(t) \ , \qquad (2)$$

et l'on dit que $U$ est la *commande du système* décrit par l'équation (2). On fixe $X_0 \in \mathbf{R}^p$. On désigne par $X_U$ l'unique solution de (2) telle que $X_U(0) = X_0$.

**4.** Montrer que, pour tout $V \in \mathcal{U}$, il existe $Y_V$ tel que, pour tout $U \in \mathcal{U}$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on ait $X_{U+\lambda V} - X_U = \lambda Y_V$. Préciser l'équation différentielle et la condition initiale satisfaites par $Y_V$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma$ des réels $\geqslant 0$. On considère la fonction $\mathcal{C} : \mathcal{U} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\mathcal{C}(U) = \int_0^T \Big(\alpha \|X_U(t)\|^2 + \beta \|U(t)\|^2\Big) dt \; + \; \gamma \|X_U(T)\|^2 ,$$

modélisant un coût que l'on cherche à rendre minimal. Soient $U, V \in \mathcal{U}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

**5.** Montrer que $\mathcal{C}(U + \lambda V) - \mathcal{C}(U)$ est un polynôme du second degré en $\lambda$ et donner des expressions des coefficients de ce polynôme. Que peut-on dire du signe du coefficient de $\lambda^2$ ?

**6.a)** Montrer qu'il existe une unique fonction $Z_U : [0, T] \to \mathbf{R}^p$, de classe $C^1$, telle que $Z_U(T) = 2\gamma \, X_U(T)$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_U(t) = -A^* \, Z_U(t) - 2\alpha \, X_U(t) \, .$$

**b)** Exprimer $\Big(Z_U(T) | Y_V(T)\Big) + 2\alpha \displaystyle\int_0^T \Big(X_U(t) | Y_V(t)\Big) \mathrm{d}t$ par une intégrale de 0 à $T$ faisant intervenir $K, V$ et $Z_U$. [On rappelle que pour des fonctions $Z$ et $Y$ à valeurs vectorielles, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(Z(t)\Big|Y(t)\Big) = \Big(\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}(t)\Big|Y(t)\Big) + \Big(Z(t)\Big|\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t)\Big)$.]

**7.a)** Déduire des questions précédentes que

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \mathcal{C}(U + \lambda V) = \int_0^T \Big(K^* Z_U(t) + 2\beta U(t) \Big| V(t)\Big) \mathrm{d}t \, .$$

**b)** Montrer que $U_0 \in \mathcal{U}$ vérifie la condition $\mathcal{C}(U_0) = \inf_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{C}(U)$, si et seulement si, $\forall t \in [0, T], \; K^* \, Z_{U_0}(t) + 2\beta \, U_0(t) = 0$.

## Deuxième partie

On conserve les notations de la première partie.

Soit $J$ un intervalle fermé et borné de $\mathbf{R}$, non réduit à un point, et soit $J^q$ le cube qu'il définit dans $\mathbf{R}^q$. On considère l'ensemble $\widehat{\mathcal{U}}$ des commandes $U \in \mathcal{U}$ telles que $\forall \, t \in [0, T] \, , \, U(t) \in J^q$.

**8.a)** L'ensemble $\widehat{\mathcal{U}}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$ ?

**b)** Montrer que si $U, V \in \widehat{\mathcal{U}}$, $\lambda \in [0, 1]$, alors $U + \lambda(V - U) \in \widehat{\mathcal{U}}$.

**9.** Montrer que $U_0 \in \widehat{\mathcal{U}}$ vérifie la condition

$$\mathcal{C}(U_0) = \inf_{U \in \widehat{\mathcal{U}}} \mathcal{C}(U)$$

si et seulement si, $\forall \, t \in [0, T], \; \forall \, V \in \widehat{\mathcal{U}}$,

$$\Big(K^* \, Z_{U_0}(t) + 2\beta \, U_0(t) \Big| V(t) - U_0(t)\Big) \geqslant 0 \, .$$

Dans l'application qui suit, on prend $p = 2$ et $q = 1$. On choisit $J = [-a, a]$, où $a > 0$. Soit $k$ une constante réelle, $k > 0$.

Si $t \mapsto x(t)$ est une fonction deux fois dérivable, on pose

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \, .$$

Pour toute fonction $u \in \widehat{\mathcal{U}}$, on étudie les fonctions $t \mapsto x(t)$ de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}$, de classe $C^1$, et de classe $C^2$ par morceaux telles que $\ddot{x}(t) = -k\,u(t)$ en tout point $t \in [0, T]$ où $\ddot{x}$ est définie.

**10.a)** Écrire ce problème sous la forme (2) avec des matrices $A$ et $K$ que l'on déterminera. Soient $x_0$ et $v_0$ des nombres réels. Montrer qu'il existe une unique fonction $x_u$ solution de ce problème telle que $x_u(0) = x_0$ et $\dot{x}_u(0) = v_0$.

**b)** Trouver $\alpha, \beta, \gamma$ pour que $\mathcal{C}(u) = \Big(x_u(T)\Big)^2 + \Big(\dot{x}_u(T)\Big)^2$. Ces valeurs de $\alpha, \beta, \gamma$ sont choisies dans toute la suite du problème.

**c)** Montrer que $Z_u$ est une fonction affine de $t$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.

**11.a)** Soit $u_0 \in \widehat{\mathcal{U}}$ tel que $x_{u_0}(T) = 0$ et $\dot{x}_{u_0}(T) = 0$. Montrer que $\mathcal{C}(u_0) = \inf\limits_{u \in \widehat{\mathcal{U}}} \mathcal{C}(u)$.

**b)** Soit $u_0 \in \widehat{\mathcal{U}}$ tel que

*(i)* $x_{u_0}(T)$ et $\dot{x}_{u_0}(T)$ ne sont pas tous deux nuls ;

*(ii)* $\mathcal{C}(u_0) = \inf\limits_{u \in \widehat{\mathcal{U}}} \mathcal{C}(u)$.

Montrer que la fonction $u_0$ est constante par morceaux.

**12.** On suppose que $x_0 = 1 + \dfrac{T^2}{2}\Big(1 + \dfrac{ka}{2}\Big)$, $v_0 = -\dfrac{T}{2}$.

**a)** On considère $u_0(t)$ telle que :

$$u_0(t) = a \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2} \quad , \quad u_0(t) = -a \text{ si } \frac{T}{2} < t \leqslant T \, .$$

Calculer $x_{u_0}(T)$ et $\dot{x}_{u_0}(T)$.

**b)** Montrer que $\mathcal{C}(u_0) = \inf\limits_{u \in \widehat{\mathcal{U}}} \mathcal{C}(u)$.

**c)** On considère le cas où $k\,a = \dfrac{1}{4}$ et $T = 4$. La fonction $u_0$ est-elle alors l'unique fonction de $\widehat{\mathcal{U}}$ telle que $\mathcal{C}(u_0) = \inf\limits_{u \in \widehat{\mathcal{U}}} \mathcal{C}(u)$ ?

* *
*