

SESSION 2002



PCM2007

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

**MATHEMATIQUES 2**

Durée : 4 heures

*Les calculatrices sont interdites*

\*\*\*\*\*

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\*\*\*\*\*

*La partie IV peut être traitée indépendamment des autres.*

**PARTIE I**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $P_n$  la fonction polynôme de la variable réelle  $x$  définie par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (x^2 - 1)^n \right]$$

I.1 Donner une expression explicite des fonctions polynômes  $P_0, P_1, P_2, P_3$ .

I.2 Exprimer  $P_n(-x)$  en fonction de  $P_n(x)$ .

I.3 Calculer  $P_n(0)$  et  $P'_n(0)$ .

I.4 En effectuant de deux façons différentes le calcul de  $\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} \left[ (x^2 - 1)^{n+1} \right]$ , montrer que l'on a :

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

I.5 Soit  $k$  un nombre entier compris au sens large entre 0 et  $n - 1$ . Préciser l'ordre de multiplicité de  $+1$  et  $-1$  en tant que racines de la dérivée d'ordre  $k$  de  $(x^2 - 1)^n$ .

**Tournez la page SVP**

En appliquant le théorème de Rolle aux dérivées successives de  $(x^2 - 1)^n$ , montrer que  $P_n$  admet  $n$  racines réelles distinctes, toutes comprises strictement entre  $-1$  et  $+1$ .

## PARTIE II

Soit  $f$  la fonction de deux variables réelles  $x, y$  définie par :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + x^2}}$$

**II.1** Représenter graphiquement l'ensemble  $\mathcal{D}_f$  des couples  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  en lesquels  $f(x, y)$  est définie.

Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des couples  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $2|x||y| + |x|^2 < 1$ .

On admettra que l'on a sur  $\mathcal{E}$  un développement en série de  $f$  de la forme :

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(y)x^n \quad (E)$$

où les fonctions  $A_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et que les dérivées partielles de  $f$  à tous les ordres, par rapport à l'ensemble des deux variables  $x$  et  $y$ , peuvent se calculer en dérivant terme à terme le deuxième membre de l'égalité (E).

**II.2** Représenter graphiquement l'ensemble  $\mathcal{E}$ .

**II.3** Calculer  $A_n(0)$  et  $A'_n(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**II.4**

**II.4.1** Calculer  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (x - y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .

En déduire que l'on a  $yA'_0(y) = 0$ , et pour tout  $n \geq 1$ ,  $yA'_n(y) - A'_{n-1}(y) = nA_n(y)$  (1).

**II.4.2** Calculer  $(1 - 2xy + x^2) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (x - y)f(x, y)$ .

En déduire que l'on a  $A_1(y) - yA_0(y) = 0$ , et pour tout  $n \geq 2$  :

$$nA_n(y) - (2n - 1)yA_{n-1}(y) + (n - 1)A_{n-2}(y) = 0 \quad (2)$$

**II.4.3** En dérivant les relations obtenues à la question précédente, montrer que l'on a, pour tout  $n \geq 1$ , la relation  $A'_n(y) - yA'_{n-1}(y) = nA_{n-1}(y)$  (3).

**II.4.4** Déduire de ce qui précède que l'on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(1 - y^2)A''_n(y) - 2yA'_n(y) + n(n + 1)A_n(y) = 0.$$

Exprimer  $A_n(y)$  en fonction de  $P_n(y)$  pour tout  $y \in ]-1, +1[$ .

### PARTIE III

On considère les fonctions  $F$ ,  $C$  et  $S$  des deux variables réelles  $x$  et  $\theta$  définies pour  $|x| < 1$  et  $\theta$  quelconque par :

$$F(x, \theta) = \frac{1}{1 - 2x \cos \theta + x^2}, \quad C(x, \theta) = \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}, \quad S(x, \theta) = \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}.$$

**III.1** Pour  $x$  fixé tel que  $|x| < 1$ , déterminer les développements en séries de Fourier

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) \cos n\theta$  de  $C(x, \theta)$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x) \sin n\theta$  de  $S(x, \theta)$  considérées comme fonctions de la

variable  $\theta$ . On montrera que  $C(x, \theta) + iS(x, \theta) = \frac{1}{1 - xe^{i\theta}}$ .

A-t-on les égalités  $C(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) \cos n\theta$  et  $S(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x) \sin n\theta$  pour tout couple  $(x, \theta)$

appartenant à  $] -1, +1[ \times \mathbb{R}$  ?

**III.2** Dédurre de la question précédente le développement en série de Fourier  $F(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \cos n\theta$  de  $F(x, \theta)$  considérée comme fonction de la variable  $\theta$ , ainsi que le développement en série entière  $F(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(\theta) x^n$  de  $F(x, \theta)$  considérée comme fonction de la variable  $x$ .

**III.3** Montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  on a  $\sum_{k=0}^n P_k(\cos \theta) P_{n-k}(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ , cette dernière fonction de  $\theta$  étant supposée prolongée par continuité lorsque  $\theta$  est multiple entier de  $\pi$ .

### PARTIE IV

Soit  $\lambda$  un nombre réel non entier relatif. On considère l'équation différentielle linéaire en la fonction inconnue  $z$  de la variable réelle  $x$ , à valeurs réelles :

$$(L_\lambda) \quad (1-x^2)z''(x) - 2xz'(x) + \lambda(\lambda+1)z(x) = 0.$$

On se propose de déterminer les solutions de  $(L_\lambda)$  développables en série entière au voisinage de 0.

**IV.1** Soit  $z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$  la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.

Déterminer la relation qui doit lier  $\alpha_{n+2}$  et  $\alpha_n$  pour que  $z$  soit solution de  $(L_\lambda)$ .

**IV.2** En déduire l'expression de  $\alpha_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**IV.3** Quel est le rayon de convergence des séries entières ainsi obtenues ?

**Fin de l'énoncé**