CONCOURS COMMUN 2001
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Jeudi 17 mai 2001 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend : 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

PROBLEME 1

Les parties **A** *et* **B** *sont indépendantes, mais sont utilisées par la partie* **C**.

PARTIE A :

Pour tout réel a positif ou nul, on note g_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_a(t) = t^a$.

A.1. Montrer que la fonction g_a est prolongeable par continuité en 0 (on notera toujours g_a la fonction ainsi prolongée, qui est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$). Préciser la valeur de $g_a(0)$. Montrer que la fonction g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $a \geqslant 1$.

Soient a et b deux réels positifs ou nuls. On pose

$$I(a,b) = \int_0^1 g_a(t)\, g_b(1-t)\, dt\ .$$

A.2. Justifier l'existence de l'intégrale $I(a,b)$. Comparer $I(a,b)$ et $I(b,a)$.

On écrira abusivement $I(a,b) = \int_0^1 t^a(1-t)^b\, dt$.

A.3. Soient a et b deux réels positifs ou nuls. Trouver une relation entre $I(a+1,b)$ et $I(a,b+1)$.

A.4. Calculer $I(a,0)$. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a

$$I(a,n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1)}\ .$$

A.5. Soient p et q deux entiers naturels. Exprimer $I(p,q)$ à l'aide de factorielles.

A.6. En déduire la valeur de l'intégrale

$$J(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p+1}(\cos\theta)^{2q+1} d\theta \ ,$$

où p et q sont deux entiers naturels.

PARTIE B :

Pour tout réel a strictement positif, on note f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = x \ \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) \ .$$

B.1. Préciser l'ensemble de définition de f_a.

On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentant la restriction de la fonction f_a à l'intervalle $]a, +\infty[$.

B.2. Si a et x sont deux réels tels que $0 < a < x$, démontrer l'encadrement

$$\frac{a}{x} \leqslant \ln x - \ln(x-a) \leqslant \frac{a}{x-a} \ .$$

B.3. En déduire les variations de la fonction f_a sur l'intervalle $]a, +\infty[$ (on dressera un tableau de variations). Préciser la nature des branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_a$.

B.4. Donner l'allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sur un même schéma.

B.5. On fixe $a > 0$ et on considère la suite $y = (y_n)$ définie, pour tout entier naturel n tel que $n > a$, par $y_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$.
Etudier le comportement (sens de variation, limite) de la suite (y_n).

PARTIE C :

Pour tout réel positif ou nul x et tout entier naturel non nul n, on pose

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x \, du \ .$$

C.1. Montrer que $F_n(x) = n^{x+1} \, I(x,n)$.

C.2. En utilisant les résultats de la partie **B**, montrer que, pour tout x fixé, la suite $\big(F_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

C.3. On fixe $x \geqslant 0$.

a. Montrer l'existence d'un réel strictement positif U tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \qquad u \geqslant U \Longrightarrow e^{-u} \leqslant \frac{1}{u^{x+2}} \ .$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$F_n(x) \leqslant \int_0^U e^{-u} \, u^x \, du + \frac{1}{U} \ .$$

c. Montrer que la suite $\left(F_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout réel positif ou nul x, on pose $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.

C.4. Démontrer la relation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad F(x+1) = (x+1)\,F(x)\,.$$

En déduire la valeur de $F(k)$ pour k entier naturel.

PROBLEME 2

Les parties **B** *et* **C** *sont liées, mais la partie* **A** *est indépendante du reste du problème.*

On rappelle que, si p est un entier naturel non nul, la notation $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ représente l'algèbre des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.

PARTIE A :

Soit p un entier naturel non nul. Une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente d'indice trois** si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Dans toute cette partie, on note A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice trois. On note I la matrice-unité d'ordre p.

Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\,.$$

A.1. Vérifier la relation

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)\,E(t) = E(s+t)\,.$$

A.2. En déduire que $\left(E(t)\right)^n = E(nt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

A.3. Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?

A.4. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

A.5. En déduire que l'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, est injective.

A.6. Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $E(t)$ sous la forme d'un tableau matriciel pour $t \in \mathbb{R}$.

PARTIE B :

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.

B.1. Montrer que $F = \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles, supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de F, et un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de G.

B.2. Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

B.3. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale (toutes deux carrées d'ordre deux) telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P, D et P^{-1}.

B.4. Expliciter D^n pour tout n entier naturel. Démontrer la relation $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$. En déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

PARTIE C.

On reprend les notations de la partie **B**.

C.1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout réel t, on a

$$e^t = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right) .$$

On pourra admettre le résultat de cette question pour traiter les suivantes.

C.2. Pour tout réel t, pour tout entier naturel n, on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k$. On écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.
Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$.

C.3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, avec $a(t) = \lim_{n\to+\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim_{n\to+\infty} b_n(t)$, etc. Expliciter la matrice $E(t)$.

Réponse partielle : on obtient $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$.

C.4. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R (carrées d'ordre deux) telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad E(t) = e^{2t}\,Q + e^t\,R$$

et expliciter Q et R.

C.5. Calculer les matrices Q^2, R^2, QR, RQ. Que peut-on dire des endomorphismes q et r de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices Q et R (*on pourra préciser la réponse en utilisant les droites F et G de la question* **B.1.**) ?

C.6. En déduire que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)\,E(t) = E(s+t) .$$

Que dire de $\big(E(t)\big)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$?, de $\big(E(t)\big)^{-1}$?

L'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est-elle injective ?